А.Д. Панов

Природа математики, космология и структура реальности: объективность мира математических форм

Статья является первой в цикле из двух статей, в которых обсуждается природа математики и возникающие здесь методологические проблемы, имеющие много общего с некоторыми методологическими проблемами космологии. Эту проблематику объединяет обсуждение смысла понятия реальности в различных эмпирических контекстах. В первой статье цикла рассматриваются критерии объективной реальности особого сорта, которые характеризуются как достаточные и операционально определенные. Затем эти критерии используются для анализа природы математических истин и аргументируется точка зрения, согласно которой есть все основания рассматривать мир математических форм как объективно существующий, но не являющийся лишь продуктом культуры. Культура лишь отражает в себе объективно существующий мир математики. Объективное существование мира математических форм соотнесено с непротиворечивостью математики.

В статье показано, что анализ в некоторых случаях выводит к границам применимости научного метода в его обычном понимании, основанном, в частности, на принципе наблюдаемости. Похожая ситуация имеет место в методологии современной космологии, что подробно обсуждалось нами в статье, которая ниже цитируется как *Методология космологии*[1].

1. Достаточные операциональные критерии объективной реальности

Что означает, что нечто реально «само по себе»? Согласно диалектическому материализму, и с этим, видимо, трудно не согласиться здравому смыслу ученого, занятого практической научной работой, объективно реальным является то, что существует вне и независимо от нашего сознания[2]. Но это определение имеет несколько декларативный характер. Как практически проверить факт такого независимого существования? Можно ли формулировке придать ясный операциональный смысл? Каковы критерии реальности, которые можно было бы применить на практике в сложных и сомнительных случаях?

Не претендуя на полноту исследования вопроса[3], мы сосредоточимся лишь на одном *достаточном* критерии реальности объектов. Имеется в виду следующий критерий:

Что объективно познаваемо, то объективно существует. (R)

Надо отметить, что этот принцип, представляя лишь достаточный признак объективной реальности, не утверждает, что он является и необходимым. Если некоторый объект объективно познаваем, то он существует сам по себе, но обратное не утверждается. То есть принцип не исключает объективное существование объективно непознаваемых вещей, он просто игнорирует такую возможность. Хотя исключить существование реальности, недоступной для объективного познания, невозможно, и нам придется касаться этого вопроса, но входить в детали мы не будем, хотя здесь возникает множество проблем: что значит такое существование для нас и т. д. Не будем также настаивать, что этот принцип (R) исчерпывает все возможные признаки объективной реальности. Для наших целей этого критерия будет достаточно.

Введенный принцип требует некоторых разъяснений и уточнений, которые будут даны ниже. Сначала, однако, полезно привести пару практических примеров его использования.

Естественно начать с примера из физики. Почему считается, что реален электрон? Мы ведь не можем его увидеть или пощупать. Мы считаем, что электрон реален, т. к. его свойства могут изучаться объективными научными методами, поэтому эти свойства являются объективно познаваемыми. Заряд электрона может быть измерен разными способами: в наблюдениях движения заряженной капли под действием электрического поля в вязкой жидкости, в опытах по электролизу и др. Разные исследователи с использованием разных методов придут к одному результату, поэтому мы и считаем, что заряд электрона объективно имеет определенное значение сам по себе, независимо от того, кто и как его измеряет. Требуется только, чтобы процедура была признана корректной с научной точки зрения. Могут быть объективно исследованы и другие характеристики электрона: масса, спин и т. д., что позволяет считать, что реально существует и носитель всех этих свойств – частица под названием электрон.

Теперь пример из гуманитарных наук. Рассмотрим некоторое историческое событие. Оно рассматривается как реально имевшее место, если несколько независимых источников описывают его согласованным образом, имеются артефакты, подтверждающие это событие, все это сходится с датировками, получаемыми какими-то объективными методами вроде радиоуглеродного анализа и т. д. Иными словами, историческое событие считается реальным, если относительно него удается получить согласованную информацию, которая имеет одинаковый смысл для любого непредвзятого исследователя. Так строится наука история. Этот пример показывает, что сфера применимости критерия реальности (R), в принципе, очень широка, но, в то же время, в его использовании имеются многочисленные тонкости, зависящие от области применения. Так, исторические документы и другие свидетельства часто фальсифицируются правящими элитами из конъюнктурных политических соображений, а история из-за этого нередко превращается из науки в орудие подавления инакомыслия. Впрочем, наука история в этом смысле вовсе не является исключением. Применение научного метода и в общем случае сопряжено со многими проблемами, что является благодатной почвой для произрастания лженауки в разных вариантах и для других злоупотреблений. Достаточно вспомнить «мичуринскую биологию» и борьбу с кибернетикой в сталинском СССР или «теорию мирового льда» Ганса Гёрбигера[4], пропагандировавшуюся в фашистской Германии. Фальсификация истории в этом смысле является лишь частным примером. Все это, однако, не мешает за научным методом признавать право на существование. Условием развития науки является сознательное отношение к возможности различных аберраций.

Этот опыт учит, что в каждом конкретном случае особенности использования критерия (R) должны быть тщательно проанализированы, а сам критерий представляет собой некоторую идеализацию. Установить истинность посылки в критерии (R) – объективную познаваемость – возможно лишь с некоторой степенью точности или уверенности. Хотя эта степень уверенности практически может быть очень высокой, но в ее оценке *всегда* присутствует субъективный фактор, и это правило не знает исключений. Полная уверенность является недостижимым пределом, к которому следует стремиться[5]. Этого, однако, достаточно для того, чтобы возникала уверенность в объективном существовании предметов, входящих в сферу научного опыта, хотя степень уверенности в существовании того или иного конкретного объекта легко может оказаться функцией времени.

Как следует из формулировки критерия (R), вопрос об объективной реальности объекта, по сути, сведен в нем к вопросу о смысле термина «объективно познаваемо». Объективная познаваемость сама по себе тоже требует разъяснения. Опять, не пытаясь дать исчерпывающую дефиницию, поясним, что это означает по крайней мере в некоторых важных случаях. Мы сформулируем два достаточных критерия (или, более мягко, признака) объективной познаваемости, которые могут быть поняты операционально, хотя могут и не давать исчерпывающего определения. Этого будет для нас достаточно.

Во-первых, «объективно познаваемо» то, что приводит к воспроизводимому знанию, – к знанию, которое может быть получено с использованием воспроизводимых методов. В этом случае разные субъекты могут прийти к одной и той же информации об интересующем объекте контролируемым способом, поэтому разумно считать, что эта информация имеет объективный смысл, не зависящий от самих субъектов, но зависящий от объекта, который, тем самым, объективно существует.

Подчеркнем, что когда речь идет о воспроизводимом *методе* познания, имеется в виду воспроизводимость именно метода, а не результата. Воспроизводимый метод легко может приводить и к невоспроизводимому результату. Так, например, тщательно описанная и воспроизводимая процедура измерения спина электрона с помощью установки Штерна-Герлаха приводит к невоспроизводимому в классическом смысле результату: электрон отклоняется магнитным полем установки то в одну сторону, то в другую (хотя в этом случае имеется воспроизводимость в ансамблевом смысле[6]). То, что метод воспроизводим, означает, грубо говоря, что он может быть описан четкой инструкцией или программой, а его реализация может быть возложена (в принципе) на автомат, пусть идеализированный и очень совершенный. Вот если вместе с воспроизводимостью метода имеется и воспроизводимость результата, то можно говорить о том, что объект познаваем воспроизводимым методом, т. к. не только процедуру можно воспроизвести, но и результат ее будет одним и тем же. В нашем первом примере с объективной познаваемостью электрона воспроизводимость методов означала прежде всего воспроизводимость процедур экспериментальной физики, а во втором примере (с историческим событием) воспроизводимость метода означала воспроизводимость процедур изучения источников или артефактов. Кто бы ни изучал источник и артефакт, он перед собой будет иметь один и тот же физический объект (или копию объекта, в худшем случае), поэтому воспроизводимость метода здесь мало чем отличается от воспроизводимости обычных экспериментальных методов. Например, если исследуются два разных текста и они имеют совпадающие фрагменты, то этот объективный факт может быть подтвержден любым исследователем или даже роботом и т. д.[7].

Предполагается, что в принципе всегда существует способ убедиться в том, что информация действительно получена воспроизводимым методом определенного типа. Более того, предполагается, что способ проверки воспроизводимости может быть всегда реализован в виде некоторой финитной процедуры. Отсюда следует операциональность признака объективности полученного знания, т. к., во-первых, упомянутая финитная процедура проверки метода всегда может быть до конца реализована и, во-вторых, можно прямо проверить, приводит ли сам метод к воспроизводимому (с требуемой точностью) результату. В таком понимании операциональности имеется, конечно, элемент идеализации, т. к. воспроизводимость метода иногда невозможно проверить с абсолютной несомненностью, да и со сравнением результатов могут возникнуть похожие проблемы. Это вполне аналогично идеализации в понимании исходного критерия (R) в целом, как это уже обсуждалось выше, но это не является препятствием в использовании понятия воспроизводимой процедуры. В науке всегда приходится иметь дело с некоторыми идеализациями.

Вторым признаком объективности полученного знания является то, что оно в одном и том же или эквивалентном виде реально было получено независимо разными исследователями. Действительно, если бы соответствующий объект не существовал объективно, как такое могло бы случиться? Однако остается возможность, что одно и тоже знание в разных головах возникает не в силу объективного существования соответствующего предмета, но в силу некоторого коллективного свойства, характеризующего человеческий ум как таковой. Более того, такие примеры, видимо, существуют. Это, например, представление о высшей трансцендентной сущности, лежащей в основе мира, которое возникало в разных частях света и в разных культурах вполне независимо, но со многими общими чертами. Чтобы исключить подобные артефакты разума, дополнительно мы потребуем, чтобы независимые акты познания были связаны также с воспроизводимыми методами[8]. Здесь мы явно апеллируем к предыдущему признаку объективности, т. е. новый признак не является самостоятельным, но является лишь его усилением. Однако, как будет показано ниже, он важен и сам по себе, т. к. позволяет в отдельных случаях превратить этот критерий из достаточного – в необходимый и достаточный, и использовать его для опытного контроля объективного существования объектов определенного сорта.

В отношении этого признака надо сделать несколько замечаний. Проявление либо отсутствие его наличия в отношении некоторого объекта познания (физического закона, математической теоремы, материального объекта вроде какого-нибудь отдаленного квазара со специальными свойствами) является делом случая. Это определенно именно так, если ограничиться познавательной деятельностью людей на Земле. Хотя научные открытия очень часто делаются независимо разными учеными в разных местах планеты, но стремительное распространение научной информации в современных условиях может воспрепятствовать независимому получению одного и того же результата разными группами исследователей. Этот фактор, как видно, имеет субъективный характер – он связан с условиями, в которых протекает познавательная деятельность. Другим препятствием субъективного характера для проявления этого признака является крайняя дороговизна исследований в ряде фундаментальных областей науки в настоящее время (и в обозримом будущем)[9], что приводит к тому, что многие экспериментальные исследования, по необходимости, проводятся на совершенно уникальных, существующих в единственном экземпляре установках, и поэтому соответствующие результаты никак не могут быть получены независимо. Однако можно выделить отдельные широкие области знаний, в которых феномен «независимых открытий» проявлялся достаточно регулярно. Для тех конкретных случаев, когда такое дублирование открытий имело место, мы определенно имеем признак того, что речь идет об объективном знании. Предполагая, что рассматриваемая область знаний обладает определенной однородностью, можно думать, что и другие истины из этой области в принципе могли бы быть открыты независимо, если бы обстоятельства сложились для них более «удачно». Вся эта область знаний получает тогда дополнительный аргумент в пользу того, что исследуемые в ней объекты существуют реально, сами по себе. Критерий «независимой открываемости» является операциональным в том смысле, что в каждом конкретном случае можно указать, было ли какое-то знание получено несколько раз независимо или нет, и имели ли место такие случаи в рассматриваемой области знаний. Здесь, конечно, тоже присутствует некоторый элемент идеализации в том смысле, что вопрос о том, было ли сделано некоторое открытие действительно независимо разными авторами, может оказаться спорным[10].

Подчеркнем, что оба упомянутых достаточных и операционально определенных признака объективности знания должны пока рассматриваться как предмет философского выбора. На данном этапе анализа они являются философской спекуляцией, философской гипотезой или методологической установкой. Мы их принимаем для проведения дальнейшего анализа, но нужно четко понимать, что осмысленная возможность «доказательства», «опытной проверки» или фальсификации для них не обсуждалась.

Для удобства дальнейших ссылок зафиксируем введенные признаки объективной познаваемости и, соответственно, объективной реальности в «квазиматематической» форме. Пусть A означает вещь, которая может быть объектом познания. ОбСущ(A), ОбПозн(A), ВоспрМет(A), НезОткр(A) есть предикаты, означающие, соответственно, «A объективно существует», «A объективно познаваемо», «A познаваемо воспроизводимыми методами», «A открыто независимо более одного раза». Тогда введенные выше признаки объективного существования объекта A имеют форму двойной импликации:

ВоспрМет(A) $\Rightarrow$ ОбПозн(A) $\Rightarrow$ ОбСущ(A) (R1)
НезОткр(A) $\Rightarrow$ ОбПозн(A) $\Rightarrow$ ОбСущ(A) (R2)

И, наконец, последнее общее замечание о критериях объективной реальности. Идея, согласно которой собственной реальностью обладает все то, что объективно познаваемо, вовсе не отменяет того, что возможны разные виды объективной реальности. Объективная реальность не обязана быть однородной. Возможна простая физическая реальность того, что операционально определимо или прямо наблюдаемо в физике. Возможна реальность за пределами космологического горизонта событий или реальность, связанная с операционально неопределимыми распределениями вероятности, – то, что в *Методологии космологии* было соотнесено с теоретически реальными объектами. Возможна математическая реальность, которая будет подробно рассмотрена в оставшейся части статьи. И это, конечно, не исчерпывает всех возможностей и оттенков. Однако из этого списка мы бы исключили такую реальность объекта, которую можно назвать «потенциальной» в том смысле, что она находится в зависимости от того, имел ли место фактически акт познания в отношении этого объекта или нет в том случае, когда принципиальная возможность такого познавательного акта не вызывает сомнений. То есть мы решительно устраняем субъективный фактор из любых оценок реальности. Если, например, в какой-то момент времени был обнаружен некоторый далекий и интересный астрономический объект, то мы считаем, что этот объект вполне объективно существовал и до того, как мы его нашли и исследовали. Ничего «потенциального» в его существовании не было ни до его обнаружения, ни даже до появления нас самих как познающих субъектов, если объект существовал и до нас. Мы считаем, что объективно существует множество еще не обнаруженных астрономических объектов. «Потенциальность» может характеризовать наше *субъективное отношение* к существованию каких-то объектов, но не это существование как таковое[11]. Светили звезды и до нас, и Луна на небе появилась, не когда на нее посмотрел первый человек.

2. Объективное существование мира математических форм

Мы теперь применим намеченный выше аппарат достаточных операциональных критериев объективной реальности, который мы принимаем в качестве начального методологического принципа и в качестве инструмента, к непростому вопросу: обладают ли «самостоятельным» существованием абстрактные математические объекты или они являются лишь продуктами нашего сознания (или продуктами культуры)? Является ли мир математики в каком-то смысле объективно реальным или математика – это просто изобретение людей?

Мы, конечно, не являемся первыми исследователями этой проблемы[12]. Горячим сторонником независимой реальности «платоновского мира математических форм» является, как известно, знаменитый математик, физик и популяризатор науки Роджер Пенроуз[13]. Он последовательно проводил эту идею в своих книгах[14] о законах мышления и законах природы. Пенроуз обосновывал ее, используя ряд конкретных примеров «математических форм». Одним упомянутым им примером была знаменитая великая теорема Ферма. Хотя теорема была сформулирована Пьером Ферма в 1637 г., и окончательно доказана Эндрю Уайлзом лишь к 1995 г. (результаты публиковались несколько лет), мнение Пенроуза состоит в том, что теорема была справедлива (существовала) не только до того, как ее доказал Уайлз, но и до того, как она впервые пришла в голову Ферма. Пьер Ферма первым догадался о существовании реального объекта (теоремы), который существовал и до него в идеальном мире математических форм, а Эндрю Уайлз только окончательно установил, что догадка Ферма была верна. Другим излюбленным объектом Роджера Пенроуза является невероятно сложное множество (фрактал), открытое Бенуа Мандельбротом. Чтобы представить аргументацию Пенроуза о независимой реальности этого множества, лучше всего предоставить слово ему самому: «Множество Мандельброта совершенно определенно не является изобретением человеческого разума. Оно просто объективно существует в самой математике. Если вообще имеет смысл говорить о существовании множества Мандельброта, то существует оно отнюдь не в наших с вами разумах, ибо ни один человек не в состоянии в полной мере постичь бесконечное разнообразие и безграничную сложность этого математического объекта. Равным образом не может оно существовать и в многочисленных компьютерных распечатках, которые пока только начинают охватывать некую малую толику его невообразимо сложно детализированной структуры, – на этих распечатках мы видим не само множество Мандельброта и даже не приближение к нему, но лишь бледную тень очень грубого приближения. И все же множество Мандельброта существует, и существует вполне устойчиво: кто бы ни ставил перед компьютером задачу построения множества, каким бы ни был этот самый компьютер, структура в результате получается всегда одинаковая – и чем "глубже" мы считаем, тем более точной и детальной будет картинка. Следовательно, существовать множество Мандельброта может только в платоновском мире математических форм, больше нигде»[15].

В приведенном фрагменте Роджер Пенроуз для аргументации обращается к здравому смыслу. Но в другом месте он дает так же и существенное уточнение своего понимания реальности математических структур: «Когда я говорю о "существовании" платоновского мира, я имею в виду всего-навсего объективность математической истины[16]». Нетрудно видеть, что понимание «существования» у Роджера Пенроуза представляет собой, фактически, частный случай подхода к понятию объективного существования в общем случае, который был рассмотрен в предыдущем разделе. В обсуждении реальности множества Мандельброта звучит также мотив, связанный с независимым получением одной и той же информации различными путями. Собственно, наш подход к понятию «объективного существования» является лишь экспликацией идей Роджера Пенроуза, и, в значительной степени, был ими инициирован.

С точки зрения нашего несколько более общего и более явно сформулированного подхода к понятию объективной реальности, основанного на достаточных операционально определенных критериях, математические истины (или математические формы, по терминологии Пенроуза) определенно обладают собственной реальностью, т. к., вне всяких сомнений, удовлетворяют обоим сформулированным нами условиям (R1) и (R2). Во-первых, они объективно познаваемы, т. к. получаются воспроизводимыми методами математических доказательств или вычислений[17] (критерий R1). Во-вторых, многие математические истины действительно открывались независимо разными исследователями (критерий R2). Достаточно вспомнить независимое изобретение математического анализа Исааком Ньютоном и Готфридом фон Лейбницем, независимое появление неевклидовой геометрии в трудах Карла Гаусса, Николая Лобачевского, Яноша Бойяи, независимое открытие односторонней поверхности Фердинандом Мёбиусом и Иоганном Листингом и т. д. Забавным примером работы второго критерия реальности в отношении математики является обыкновенная контрольная работа по математике в школе: оценка работ учителем основана на вере в то, что все ученики, не списывая друг у друга, должны прийти к одному и тому же правильному решению задачи, т. к. это правильное решение в мире математических форм объективно существует независимо о того, смогли ли его найти ученики.

Таким образом, если исходить из критерия объективной реальности, основанного на объективной познаваемости объектов (R), мир математических форм существует совершенно объективно и независимо от сознания познающих его субъектов. Это объективное существование ни в малейшей степени не является в чем-то ущербным по сравнению с объективным существованием объектов материального мира, оно ни в каком смысле не является «потенциальным». «Потенциальности» в существовании еще не открытого математического объекта не больше, чем «потенциальности» в существовании галактики, еще не занесенной в каталог. Точнее говоря, ни по каким формальным признакам объективное существование мира математических форм не отличается от объективного существования мира материальных объектов. В обоих случаях уверенность в объективном существовании основана на познаваемости воспроизводимыми методами, и только природа этих методов кажется различной в отношении мира математики и материального мира. В первом случае это метод доказательств, во втором случае это экспериментальный метод или наблюдения. Однако заметим, что вопрос о природе воспроизводимых методов вовсе не затрагивался нами при обсуждении признаков объективного существования, он не фигурирует в формулировке критериев (R), (R1), (R2) и действительно не имеет отношения к делу. Важна только воспроизводимость и объективность методов познания как таковая.

Заметим однако, что даже если настаивать на необходимости рассмотрения вопроса о различии природы воспроизводимых методов познания в математике и в отношении материального мира, то следует отметить, что различие между этими двумя группами методов не столь велико, как это может показаться. Описание любого воспроизводимого экспериментального метода включает перечисление действий, которые должны быть выполнены одно за другим, будучи линейно упорядоченными во времени, чтобы получить конечный результат. Эти действия, в принципе, могут быть выполнены и автоматом, как мы уже упоминали[18]. Но любое математическое доказательство или вычисление означает в точности то же самое. Вычисление есть процесс, который в принципе должен быть выполнен некоторым физическим устройством шаг за шагом, будучи линейно упорядоченным во времени (точнее – последовательные шаги должны быть причинно связаны). Роль такого устройства могут играть мозги математика, но, в принципе, это может быть и автомат – машина Тьюринга (в большей или меньшей степени идеализированная) или эквивалентное устройство (в том числе – привычные для нас компьютеры). Собственно, это обстоятельство имеет прямое отношение к известному «тезису Черча-Тьюринга»[19]. Математическое доказательство неотделимо от его принципиальной реализуемости на некоторых физических носителях в виде процесса или последовательности действий, развернутых в физическом времени. Поэтому математическое доказательство, как определенная разновидность *метода познания*, может и должно рассматриваться как разновидность воспроизводимой *экспериментальной* процедуры. Мы еще не раз будем возвращаться к этому обстоятельству и существенно уточним аргументацию. Отметим, что любое доказательство имеет и другую сторону: оно существует как *объект* в идеальном мире математических форм.

Реальное проведенное доказательство является проекцией этого идеального объекта в физический мир. Не следует путать доказательство как *метод* исследования математических истин и как *объект* идеального мира математических форм.

Близость методов математики обычным экспериментальным процедурам стала еще более заметной с возникновением понятия квантового компьютера, квантовых вычислений и с появлением первых экспериментальных прототипов этих устройств. Не вдаваясь в детали, отметим, что квантовое вычисление принципиально не может быть выполнено «на бумаге» или «в уме», но может быть реализовано только в виде некоторого физического (существенно квантового) процесса специальным устройством – квантовым компьютером. При этом квантовый компьютер является по своей сути аналоговым, но не цифровым, устройством. Квантовый компьютер работает лишь с конечной точностью, и всегда имеется неисчезающая вероятность получения ошибки. Квантовое вычисление ничем не отличается от других процедур экспериментальной физики, реальные прототипы квантовых вычислительных устройств действительно являются весьма сложными экспериментальными установками, но при этом все это принадлежит, все-таки, математике (например, это способ решения задачи разложения на простые множители очень больших целых чисел, которая недоступна классическим компьютерам). Даже если настаивать, что работа квантового компьютера и квантовые вычисления не являются чем-то вполне математическим, этот пример с полной очевидностью показывает, что граница между обычными экспериментальными методами и методами математики является крайне размытой.

В связи с этим заметим также, что в математике метод познания (доказательство или вычисление, рассматриваемое как причинный материальный процесс) отделен от объектов познания – идеальных форм из мира математики (которые возникают как результаты вычислений и доказательств), подобно тому, как объекты исследования естественных наук отделены от методов[20]. Метод познания в математике адресует что-то материальное (причинный процесс типа вычисления), но объект познания является идеальным и существует вне материального мира – в объективном мире математических форм. Однако разделение на объект и метод в обоих случаях – и в математике, и в естественных науках –

является весьма условным. Сами доказательства, как идеальные объекты мира математических форм, могут быть предметом математических исследований (в *метаматематике*; известнейшими результатами метаматематики являются теоремы Гёделя о полноте и неполноте). Аналогично, исследование экспериментальной методики занимает всегда львиную долю любой экспериментальной статьи по физике, химии, генетике и т. д. Более того, часто встречаются экспериментальные работы, имеющие исключительно методический характер – ничего кроме методики не исследующие. То есть метод сам по себе очень часто является объектом исследования и в естественных науках.

Как уже упоминалось, понятие объективной познаваемости и понятие воспроизводимого метода познания в каждом конкретном случае может содержать множество тонкостей, и математическое доказательство, как воспроизводимый метод познания, не является в этом смысле исключением. Так, в математике отсутствует единое представление о том, что такое математическая строгость[21]. Обычное (классическое) понятие математической строгости допускает доказательства существования неконструктивных объектов (т. е. доказательство существования объекта без указания явного способа его построения), использование закона исключения третьего (и, вместе с этим, способа доказательства от противного), легко работает с актуальной бесконечностью (например, считает множество всех натуральных чисел актуально существующим). Само это обычное понятие математической строгости используется в двух вариантах: на интуитивном уровне (как в курсе школьной математики, в стандартных курсах математического анализа и алгебры и т. д.) и в строго формализованном виде на основе математической логики и формальных языков. Эквивалентность двух подходов очевидна далеко не всегда. Помимо этого имеется представление о математической строгости в концепции интуиционизма или в конструктивной математике[22], которое идет от Л.Э.Я.Брауэра (1907) и было формализовано в математической логике А. Гейтингом (1930). Здесь неконструктивные доказательства существования не допускаются, закон исключения третьего и доказательства от противного не допускаются тоже, а вместо понятия актуальной бесконечности используется понятие потенциальной бесконечности, в котором предполагается только возможность конструктивно генерировать неограниченную последовательность элементов, но не одновременное существование всей совокупности. Математик-интуиционист не признает многие обычные доказательства строгими, а обычный математик вполне может посчитать выкладки интуиционистов ненужным ригоризмом. Как видно, даже воспроизводимость методов математики имеет субъективный аспект, и в этом смысле математика похожа на все прочие науки. Несмотря на все эти тонкости и проблемы, наличие воспроизводимости методов математики невозможно отрицать в любом из подходов – классическом или конструктивном – отдельно. В какой бы из концепций математической строгости мы ни работали, относительно любого математического рассуждения или вычисления можно совершенно определенно сказать, является ли оно правильным математическим выводом или нет. Более того, в математической логике определены даже эффективные процедуры для решения такого рода вопросов. Однако из-за неоднозначности в определении понятия доказательства мир математических форм оказывается неоднородным. Некоторые его объекты достижимы в одном подходе, но недостижимы или даже не имеют смысла в другом. Соответственно, объективный мир математических форм содержит объекты (как минимум) двух различных типов – классические математические объекты и конструктивные. Мир математических форм содержит неоднородности и других типов, некоторые из которых будут упомянуты ниже.

3. Опытный контроль существования мира математических форм и непротиворечивость математики

Шарль Эрмит (1822–1901) писал[23]: «Я *верю*, что числа и функции анализа не являются произвольными созданиями нашего разума; я думаю, что они существуют вне нас в силу той же необходимости, как и объекты реального мира, и мы их встречаем или открываем и изучаем точно так, как это делают физики, химики или зоологи» (курсив мой. – *А.П.*). Отмечая исключительную ясность формулировки основной мысли и полностью к ней присоединяясь, хотелось бы, однако, внести одно уточнение в статус этой идеи.

Верить в независимую реальность объектов математики не обязательно, т. к. ее можно *проверить*. Объективное существование мира математических форм имеет следствия, открытые для контроля опытом, и формулировка этих следствий такова, что они открыты и для фальсификации в смысле Поппера. Реальность мира математики имеет структуру проверяемого научного утверждения. Рассмотрим обоснование этого очень сильного утверждения.

Идею опытной проверки реальности мира математических форм можно усмотреть уже в комментариях Роджера Пенроуза по поводу реальности множества Мандельброта: «кто бы ни ставил перед компьютером задачу построения множества, каким бы ни был этот самый компьютер, структура в результате получается всегда одинаковая» (см. раздел 2). Это утверждение имеет форму *предсказания*, которое адресует неограниченный и неопределенный набор еще не проведенных вычислений; оно является *следствием* идеи об объективном существовании множества Мандельброта; и это предсказание можно *проверить*.

Уточним и обобщим эту мысль. Рассмотрим какой-нибудь математический объект, про который заранее понятно, что он является осмысленным, но некоторые его детальные *характеристики* могут быть и неизвестны. Это может быть некоторый еще не исследованный фрагмент множества Мандельброта (характеристика – конкретный рисунок множества); это может быть осмысленное утверждение, имеющее форму теоремы, но которая еще не доказана и не опровергнута (характеристика – ложь или истина); это может быть и что-то совсем простое, например миллиардный знак в десятичном разложении квадратного корня из 4711 (характеристика – цифра от 0 до 9). Из представления об объективном существовании мира математических форм следует, что значения таких характеристик существуют совершенно объективно и независимо от того, вычислял их кто-нибудь или нет. Это позволяет относительно таких характеристик сделать следующее *предсказание*: кто бы и каким бы методом ни взялся вычислять определенную характеристику, результат получится всегда один, т. к. он существует объективно и независимо до любого его практического вычисления. Совершенно очевидно, что это предсказание имеет форму, открытую для проверки опытом. Этот опыт состоит в сравнении результатов различных путей вычисления значений данной характеристики. Заметим, что существование неэквивалентных путей вычисления какой-нибудь характеристики в общем случае не вызывает сомнений: например, число π может быть вычислено с помощью различных рядов и бесконечных произведений, представлено интегралами нескольких разных типов, можно, наконец, воспользоваться методом Монте Карло. В пределах точности, обеспечиваемой методом, получится одно и то же. Даже тот факт, что 1+1=2, может быть проверен независимо в разных аксиоматических системах арифметики, соответствующее вычисление может быть проведено устройствами, работа которых основана на разных принципах (двоичные или десятичные, цифровые или аналоговые).

Очевидно также, что этот сорт предсказаний имеет форму, открытую для опытной фальсификации: достаточно предъявить два правильных вычисления[24], которые приводят к различным результатам, и объективное существование данной характеристики будет фальсифицировано. Но такой контрпример фальсифицирует объективное существование не только той характеристики, которая исследовалась, он делает и значительно больше.

Получение двух различных результатов с помощью различных, но правильных логических выводов называется противоречием. Это означает, что в рассматриваемой системе для некоторого осмысленного утверждения *A* можно одновременно доказать *A* и *не-A*. Это означает противоречивость не только утверждения *A*, но и всей системы, в которой производился данный вывод, т. к. в системе, в которой можно хотя бы для одного утверждения *A* доказать одновременно *A* и *не-A*, можно доказать любое утверждение, которое вообще можно сформулировать (это теорема математической логики). Такая система с практической точки зрения является совершенно бесполезной, и это означает также, что никакие «истины» или математические формы такой теории никаким объективным существованием не обладают, т. к. им невозможно приписать никаких определенных значений. Единственный контрпример фальсифицирует объективное существование всего того фрагмента мира математических форм, который опирается на теорию или формальную систему, в которой был получен данный противоречивый результат.

Закономерен вопрос: не является ли полученная форма фальсифицируемости в каком-то смысле тривиальной или тавтологичной? В том смысле, например, что математика на самом деле является непротиворечивой (в противном случае она была бы бесполезной), поэтому попытка фальсифицировать ее a priori обречена на неудачу, и утверждение о фальсифицируемости утрачивает содержательный смысл: объективное существование мира математических форм тавтологично нефальсифицируемо.

На это мы приведем два возражения.

Первое возражение. Фальсифицируемость по Попперу есть требование только к *форме* следствий, вытекающих из теории. Научные утверждения должны приводить к таким следствиям, для которых в принципе можно содержательно описать ситуацию, когда следствие отвергается опытом. И это требование вне всяких сомнений выполнено для гипотезы о реальности мира математических форм: если предъявлено два правильных вычисления с различными результатами, то предсказание о том, что результат должен быть один, т. к. существует объективно, недвусмысленно опровергнуто. Для действительно вненаучных утверждений следствия не могут иметь даже такой формы. Например, из утверждения о существовании Бога нельзя вывести следствий, даже форма которых допускала бы фальсификацию.

Второе возражение состоит в том, что непротиворечивость мира математических форм на самом деле отнюдь не имеет тривиального характера. По этому поводу в первой книге фундаментального трактата по математике Н.Бурбаки написано[25]: «Итак, мы верим, что математике суждено выжить и что никогда не произойдет крушения главных частей этого величественного здания вследствие внезапного выявления противоречия; но мы не утверждаем, что это мнение основано на чем-либо, кроме опыта». Причем, добавим, что понимание опыта здесь весьма близко к пониманию опыта в экспериментальных научных дисциплинах: это применение раз за разом определенных процедур с неизменным вопросом: а что получится? Попытка обнаружить противоречие в математике и, вместе с тем, фальсифицировать объективное существование мира математических форм является содержательно осмысленной, т. к. непротиворечивость математики в целом не доказана. Более того, опыт обнаружения противоречий в математике имеется: это случилось, например, в наивной канторовской теории множеств в начале XX в. Оказалось, что основная для теории множеств идея, согласно которой любое осмысленное свойство определяет множество объектов, обладающих этим свойством, приводит к противоречию. Тогда, правда, противоречие удалось устранить за счет более аккуратной формулировки теории, и математика в целом устояла, хотя потрясение было велико.

В утверждении о недоказанности непротиворечивости математики имеются детали, которые требуют уточнения. В отношении некоторых чрезвычайно обширных разделов математики непротиворечивость не только не доказана, но, в определенном смысле, не может быть доказана в принципе. Это следует из второй теоремы Гёделя о неполноте, которая выполняется для любой математической теории, содержащей формальную арифметику, для теорий, содержащих аксиоматическую теорию множеств (например, в виде системы аксиом Цермело-Френкеля) и для любых разумных обобщений этих теорий[26]. Вторая теорема Гёделя о неполноте утверждает, что непротиворечивость системы не может быть доказана внутри самой системы ее собственными средствами, если система действительно непротиворечива[27]. т. к. формальная арифметика является основой теории рациональных чисел, рациональные числа являются основой системы вещественных чисел, а те, в свою очередь, основой большинства других числовых систем и анализа, то под вопросом оказывается непротиворечивость всей математики, работающей с числовыми системами. Теория множеств, в свою очередь, прямо включена во многие абстрактные математические дисциплины, такие как топология, теория групп и т. д., поэтому непротиворечивость всех этих областей математики также не доказана. Все упомянутые системы вместе составляет бóльшую часть математики.

Заметим, что существуют доказательства непротиворечивости формальной арифметики, имеющие относительный характер: непротиворечивость арифметики доказана, если некоторая другая система непротиворечива. Этот подход был бы заведомо осмысленным в том случае, если бы непротиворечивость этой другой системы была чем-то существенно более очевидным, чем непротиворечивость самой формальной арифметики. Это, в частности, обеспечено для систем, основанных на финитных методах анализа (интуиционизм и родственные системы). Эта идея является одной из предпосылок программы установления непротиворечивости математики Давида Гильберта. По этому поводу в предисловии к первому тому «Оснований математики» Гильберт пишет[28]: «...возникшее на определенное время мнение, будто из некоторых недавних результатов Гёделя следует неосуществимость моей теории доказательств, является заблуждением. Этот результат на самом деле показывает только, что для более глубоких доказательств непротиворечивости финитная точка зрения должна быть использована некоторым более сильным образом, чем это оказалось необходимым при рассмотрении элементарных формализмов». Действительно, общих теорем, запрещающих доказательство непротиворечивости формальной арифметики внешними, не определенными в самой арифметике, но финитными средствами, нет, и невозможность существования таких доказательств не следует из теорем Гёделя о неполноте. Этой идее следует, в частности, хорошо известное генценовское доказательство непротиворечивости арифметики (см., например, статьи Рихарда Генцена в сборнике[29]). Здесь строится специальная математическая система, которую Генцен хотел бы рассматривать как более простую и надежную, чем сама арифметика, и в рамках этой системы как самостоятельные математические объекты рассматриваются доказательства формальной арифметики (строится теория доказательств, которую называют также уже упомянутым термином «метаматематика»[30]). В рамках этой системы показано, что противоречия в доказательствах арифметики не возникает. То есть если метаматематическая система Генцена непротиворечива, то и арифметика непротиворечива. Сама эта метаматематическая система более проста, чем арифметика, в том смысле, что главная ее часть действительно использует только идеи конструктивной математики и финитные рассуждения. Однако на финальной стадии доказательства привлекается так называемый принцип трансфинитной индукции, который особенно прозрачным назвать трудно. С этим вынужден согласиться даже и сам Генцен[31]. Вопрос о непротиворечивости генценовской системы открыт, и вопрос о непротиворечивости арифметики только сведен к вопросу о непротиворечивости системы, которая, на самом деле, вовсе не является более простой, чем арифметика, она не является также и более общей, чем арифметика[32], это просто совсем другая система. Сходные доказательства были затем предложены В.Аккерманом, П.С.Новиковым, П.Лоренценом, К.Шютте, И.Н.Хлодовским[33]. Полностью финитных доказательств непротиворечивости арифметики нет до сих пор, т. е. идея Гильберта в отношении арифметики остается неосуществленной. Существует мнение, что программа Гильберта и не может быть реализована, т. к. требования Гильберта к финитности анализа столь высоки, что все эти средства могут быть реализованы без выхода за пределы формальной арифметики, следовательно, с их помощью непротиворечивость арифметики не может быть доказана по второй теореме Гёделя о неполноте. Хотя полной уверенности в этом все же нет[34].

В отношении непротиворечивости теории множеств не существует даже и таких относительных доказательств. В университетском учебнике по математической логике[35], который соответствует современному состоянию дел, по этому поводу сказано (С. 228): «В настоящее время непротиворечивость теории Ar или Ar2 можно считать надежно установленной. Непротиворечивость такой теории, как ZF, гораздо более проблематична». Здесь Ar и Ar2 – это разные способы формализации арифметики, ZF – теория множеств в аксиоматике Цермело-Френкеля. Заметим, что даже в отношении арифметики не сказано, что непротиворечивость доказана, но использована более мягкая оценка: «надежно установлена».

Между тем теоремы Гёделя о неполноте выполняются не для всех математических теорий. Точнее, существует целый ряд теорий, непротиворечивость которых может быть доказана до конца простыми и строго финитными методами. Так, например, в математической логике доказана непротиворечивость исчисления высказываний (пропозициональное исчисление) и исчисления предикатов первого порядка[36] (последнее обстоятельство тесно связано с известной теоремой Гёделя о *полноте*). Фактически это означает, что доказана непротиворечивость языка математической логики. Доказана непротиворечивость ограниченной арифметики без умножения (система Пресбургера) и непротиворечивость ограниченной арифметики с умножением, но без правила индукции или с некоторыми ограничениями на правило индукции (см. по этому поводу классическую книгу Стефена Клини[37]. С. 184, 389). Поэтому попытки фальсифицировать эти теории путем поиска противоречий обречены на неудачу. Это означает, что на неудачу обречены и попытки фальсифицировать объективное существование математических объектов этих теорий. Означает ли это, что объективное существование объектов этих теорий является тривиально нефальсифицируемым? Нет, ни в коем случае не означает. Напомним наше *Первое возражение* (см. выше): фальсифицируемость относится только к форме следствий из некоторой теории, но никак не к тому, возможна ли фальсификация «на самом деле». Теория должна быть открыта для контроля опытом по форме своих следствий, и не более. В конце концов, если некоторая теория истинна *на самом деле*, то фальсифицировать ее *на самом деле* невозможно, но это вовсе не мешает быть ей фальсифицируемой в обычном смысле. Ситуация, когда непротиворечивость некоторой математической теории доказана очевидными финитными средствами, означает следующее: здесь мы в действительности имеем такое доказательство объективного существования объектов этой теории, которое уже невозможно опровергнуть. Мы можем быть уверены, что все непротиворечивые объекты этой теории объективно существуют. Иными словами, мы имеем такие фрагменты мира математических форм, объективное существование которых доказано средствами математики. Но для других фрагментов мира математических форм объективное существование еще не доказано или (в определенном смысле) даже не может быть доказано в принципе (по второй теореме Гёделя), но открыто для опытной проверки и фальсификации. Объективный мир математики неоднороден в отношении уверенности в его объективном существовании в той же степени, в какой он неоднороден в отношении уверенности в его непротиворечивости.

Собственно, непротиворечивость математической теории и объективное существование объектов этой теории эквивалентны. В этой эквивалентности нет ничего тривиального. Это понимал еще Давид Гильберт, и эта мысль была основой мотивации его программы доказательства непротиворечивости математики путем превращения ее в чисто формальную текстовую систему. По этому поводу Н.Бурбаки пишет[38]: «Он [Гильберт] выставил новый принцип, вызвавший многочисленные отклики: в то время как в традиционной логике непротиворечивость некоторого понятия делала его лишь возможным, для Гильберта непротиворечивость некоторого понятия (по крайней мере для математических понятий, определенных аксиоматически) эквивалентна его существованию. В связи с этим возникла необходимость доказывать a priori непротиворечивость некоторой математической теории еще до начала ее систематического развития». Иными словами, Гильберт стремился получить уверенность в существовании объектов изучения, прежде чем начать их изучать. Причем его понимание существования, как видно, практически тождественно пониманию объективного существования мира математических форм в настоящей статье или у Рождера Пенроуза и явно противопоставляется «возможности» или «потенциальности».

Есть еще одна тонкость, имеющая отношение к фальсифицируемости объективного существования математических объектов, которую нельзя не упомянуть. По первой теореме Гёделя о неполноте (не путать со второй, которую мы упоминали выше) некоторые системы (формальная арифметика, теория множеств) содержат истинные утверждения, которые, однако, невыводимы в данной системе. Они называются Гёделевскими утверждениями. Непротиворечивость Гёделевских утверждений в общем случае закрыта для опытной проверки в описанном выше смысле, т. к. невозможно построить ни одного чисто формального доказательства[39] такого утверждения, следовательно, невозможно сравнить и результаты различных доказательств, что только и открывает возможность получить противоречие. Следовательно, Гёделевские утверждения, вообще говоря, закрыты для прямой фальсификации, поэтому смысл «объективного существования» для истинности таких утверждений требует более тонкого анализа, чем мы проводили до сих пор. Мы здесь не будем пытаться выстроить такой более тонкий анализ[40], но отметим, что существование этих патологических объектов, независимо от нашего отношения к ним, ни в малейшей степени не бросает тень на фальсифицируемость объективного существования мира математических форм в целом. Дело в том, что кроме таких объектов в мире математических форм определенно существуют чрезвычайно обширные фрагменты, в отношении которых открытость утверждения об их объективном существовании для контроля опытом и для фальсификации не вызывает сомнений, как мы объяснили это выше. Именно в отношении этих фрагментов утверждение об объективном существовании имеет совершенно четкий смысл и является проверяемым, независимо от более трудного вопроса, связанного с Гёделевскими утверждениями.

Идея об объективном существовании мира математических форм позволяет получить еще одно любопытное следствие, которое, в принципе, тоже открыто для проверки опытом. Если математические истины существуют объективно и независимо от нас, то они должны быть по необходимости переоткрыты другими космическими цивилизациями, достигшими как минимум уровня космических технологий (если такие цивилизации существуют), в той же форме, в которой известны нам, или в некоторой эквивалентной форме. Связано это просто с тем, что развитие высоких технологий без математики кажется совершенно невозможным, при этом другая цивилизация должна была пройти *весь* путь построения математики независимо от нас, и *все* результаты должны были быть получены независимо о нас. Но все эти результаты уже существуют независимо от кого бы то ни было в объективном мире математических форм, поэтому другая цивилизация найдет в точности то же, что и мы. Здесь, конечно, есть свои тонкости. Так, например, инопланетяне могут продвинуться в изучении высших абстрактных разделов математики меньше или больше, чем мы. Поэтому можно допустить, что часть «высших» математических результатов может остаться и не переоткрытой. Но в отношении некоторых базовых разделов математики, таких, как евклидова геометрия и основы математического анализа, это совершенно невозможно. Они должны быть общими для всех. Тонкий вопрос о том, что в точности отделяет «базовые» разделы математики от «высших», остается, но в отношении упомянутых самых-самых базовых разделов сомнений быть не может. На этом уровне понимания критерий независимости получения информации в отношении мира математических форм (R2) превращается из достаточного критерия объективности, который имеет только философское обоснование, в необходимый, открытый контролю опытом. В этом качестве критерий (R2) перемещается из области философии в область естественных наук. Именно поэтому мы и выделили критерий (R2) несмотря на то, что он является только усилением критерия (R1). Если другие цивилизации вообще существуют и когда-нибудь будут обнаружены, но окажется, что они не имеют ничего похожего на нашу математику, достигнув при этом высокого уровня технологического развития, то «реальность математических форм» будет фальсифицирована. Она окажется артефактом цивилизации людей. Это другой, независимый путь фальсификации по сравнении с тем, который был связан с анализом непротиворечивости (см. выше). Тонким моментом этого нового пути фальсификации является то, что на самом деле неизвестно, существуют другие цивилизации или нет. Перед практическим применением описанной процедуры, в принципе, должна быть решена проблема SETI[41]. По нашему мнению, это несущественно, т. к. фальсифицируемость относится только к форме следствий, как это мы уже объясняли выше. Нужно, чтобы ситуация, в которой происходит опытное опровержение следствия теории, была мыслима. Это определенно имеет место в данном случае. Напомним, что существуют «теории», для которых такие ситуации не являются даже мыслимыми.

Итак, наш вывод состоит в том, что объективная реальность представлена не только объективной реальностью материального мира, но и объективной реальностью совершенно иного рода – объективным миром математических форм. В следующей, заключительной статье данного цикла будут рассмотрены вопросы, касающиеся того, как именно протекает это независимое и объективное существование мира математических объектов, в чем состоит сущность этого сорта бытия, насколько оно связано или не связано с миром материи. Именно среди этого круга вопросов возникают параллели с методологическими проблемами космологии.

На данный труд меня в очень существенной степени вдохновили плодотворные идеи и постоянная поддержка многих моих друзей и коллег. Особенно я благодарен В.А.Анисимову, А.В.Болдачеву, Л.М.Гиндилису, И.М.Гуревичу, В.В.Казютинскому и М.Б.Менскому, каждый из которых внес что-то существенно свое. Я благодарен также всем участникам круглого стола «Космология и философия» в ИФРАН за обсуждение этой работы.

Примечания

1 *Панов А.Д.* Методологические проблемы космологии и квантовой гравитации // Современная космология: философские горизонты. М., 2011. С. 185–215.

2 Диалектический материализм настаивает также на том, что объективная реальность должна быть дана нам в ощущениях, но этот аспект определения кажется мне очень мутным. Непонятно, что следует считать ощущением. Даже мысль для мыслящего ее человека является некоторым ощущением. Я, по

крайней мере, с полной уверенностью могу это утверждать в отношении себя лично. В то же время, можно ли считать изучение компьютерной распечатки с информацией о далеком квазаре 25-й звездной величины «ощущением» этого квазара, не очень понятно.

3 Современный статус таких понятий, как реализм, материализм, объективная реальность в приложении к физике и, особенно, к космологии детально обсуждается в статье: *Казютинский В.В.* Космология, теория, реальность // Современная космология: философские горизонты. М., 2011. С. 8–54.

4 См. статью в Википедии: http://ru.wikipedia.org/wiki/Гёрбигер,_Ганс

5 Если бы научный метод приводил к полной уверенности в достоверности полученной информации, то научные споры были бы исключены. В действительности дискуссия является одной из главных составляющих научной работы.

6 Воспроизводимость результата здесь возникает, когда мы переходим от классического понятия воспроизводимости к статистическому. Тогда становятся воспроизводимыми все распределения вероятности, и волновая функция приобретает смысл как операционально определенная измеримая величина, но не по отношению к отдельной квантовой частице, а по отношению к квантовому ансамблю.

7 Определение воспроизводимой процедуры познания, апеллирующей к роботу или автомату, вовсе не подразумевает, что развитие науки может быть оставлено на усмотрение таких автоматов. Сами процедуры выдумываются людьми, здесь существенен творческий элемент, не имеющий алгоритмической природы.

8 Иногда приходится слышать, что разного рода духовные практики (медитации, молитвы) являются воспроизводимыми методами, т. к. вполне определенные действия приводят к вполне определенным результатам. В нашем понимании воспроизводимости такие практики воспроизводимостью обладать не могут, т. к. их выполнение в принципе не может быть доверено автомату. В нашем понимании воспроизводимая методика должна быть в принципе реализуема чисто механически, алгоритмическим автоматом, как это уже было указано. Это принципиальный элемент определения воспроизводимости.

9 Детальное обсуждение этого круга вопросов см.: *Панов А.Д.* Наука как явление эволюции // Эволюция: космическая, биологическая, социальная. М., 2009. С. 99–127.

10 Если бы это было не так, не возникали бы споры о приоритете.

11 Тонкий момент, связанный с понятием «потенциальной» реальности, возникает при анализе квантовых измерений. Здесь наблюдаемые значения физических величин возникают только в результате акта измерения, поэтому, казалось бы, это тот случай, когда следует признать их «потенциальное» существование до измерения. Но одиночные квантовые измерения не дают воспроизводимого результата. Поэтому мы должны считать, что одиночное квантовое измерение хоть и воспроизводимо как процедура, но не приводит ни к какому объективному знанию из-за отсутствия воспроизводящегося результата. Поэтому ни о какой объективной реальности, связанной с одиночными квантовыми измерениями, говорить вообще нельзя – по крайней

мере со строго операциональной точки зрения. Поэтому проблема «потенциальной» реальности снимается. Воспроизводимость результата, приводящая к объективному знанию, возникает только при ансамблевых измерениях в статистическом смысле, но ансамблевые измерения не приводят к проблеме «возникновения» наблюдаемых величин в процессе измерения, следовательно, проблема «потенциальной» реальности в ансамблевых измерениях и не возникает. В квантовой объективной реальности нет ничего потенциального, но в обычной интерпретации квантовой механики относится эта реальность не к отдельным квантовым системам, а к ансамблям. В этом, собственно, и состоит специфика квантовой реальности.

12 Направление мысли, в котором математические объекты мыслятся как реально существующие, хорошо известно в философии математики под именем «математический реализм». Многие величайшие математики придерживались этой позиции: среди них Шарль Эрмит, Давид Гильберт, Анри Пуанкаре, Курт Гёдель. Для нас наиболее важна фигура Роджера Пенроуза, т. к. его аргументация ближе всего той, которой и мы будем придерживаться, но суждения некоторых других математиков тоже будут приведены.

13 «Платоновский мир математических форм» – это терминология, используемая самим Рождером Пенроузом. Атрибут «платоновский» он использует без детальных ссылок на самого Платона и, в действительности, точного соответствия миру эйдосов Платона нет. Поэтому его терминологию нужно понимать несколько условно.

14 *Пенроуз Р.* Новый ум короля. М., 2003; Тени разума. М.–Ижевск, 2005; *он же.* Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель. М.–Ижевск, 2007.

15 *Пенроуз Р.* Путь к реальности. С. 37.

16 Там же. С. 35.

17 С формальной точки зрения любое доказательство можно представить как некоторое вычисление в специализированном формальном языке математической логики. Мы часто будем использовать слова «доказательство» и «вычисление» как синонимы.

18 И реально выполняются автоматами в огромном количестве случаев: как например, автоматическими космическими телескопами, на Большом адронном коллайдере и т. д.

19 Но не тождественно ему, т. к. тезис Черча-Тьюринга адресуется к существенно идеальным устройствам, а в данном случае речь идет о реальном причинном процессе.

20 Обсуждение различия между объектом и методом в математике инспирировано моей дискуссией по этому вопросу с А.В.Болдачевым. С оригинальным мнением самого Александра Болдачева, который выступает моим оппонентом по этому вопросу, можно ознакомиться на сайте: http://boldachev.livejournal.com/44998.html

21 См. напр.: *Новиков П.С.* Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. М., 1977; *Бурбаки Н.*. Очерки по истории математики. М., 1965.

22 Интуиционизм и конструктивизм в математике являются практически синонимами. Второй из терминов просто более характерен для отечественной школы математической логики. См. например: *Новиков П.С.*. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической. Гл. II.

23 Цит. по: *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. С. 29.

24 Напомним, что правильность вычисления всегда может быть установлена с помощью финитных алгоритмических процедур.

25 *Бурбаки Н.* Теория множеств. М., 1965. С. 30.

26 См.: *Коэн К.П.* Теория множеств и континуум-гипотеза. М., 2009. Гл. I. § 10.

27 Теоремы Гёделя о неполноте справедливы не для всех математических теорий. См. обсуждение ниже по тексту.

28 *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. М., 1979. С. 19.

29 Математическая теория логического вывода. М., 1967.

30 Термины «метаматематика» и «теория доказательств» были введены Давидом Гильбертом в связи с его программой обоснования непротиворечивости математики формальными средствами. См.: *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М., 1957. С. 55.

31 См.: Там же. С. 55.

См.: Там же. С. 189–190.

32 Весьма распространенным заблуждением является то, что непротиворечивость некоторой математической системы можно доказать только в более общей системе. На примере генценовской системы и ряда подобных доказательств непротиворечивости арифметики видно, что это не так.

33 См. ссылки в книге: *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. Изд. 4-е. М., 2010. С. 282. Там же полностью приведено доказательство К.Шютте.

34 См.: *Такеути Г.* Теория доказательств. М., 1978. С. 93–95.

35 *Колмогоров А.Н., Драгилин А.Г.* Математическая логика. М., 2006.

36 *Новиков П.С.*. Элементы математической логики. М., 1973. С. 108, 209.

37 *Клини С.К.* Введение в метаматематику. М., 1957.

38 *Бурбаки Н.* Очерки по истории математики. С. 54.

39 Здесь тоже есть свои тонкости. В некоторых случаях доказательство в точности одного и того же утверждения может быть получено в одной математической системе и не может быть получено в другой, где это утверждение также имеет смысл. Что это означает в отношении истинности такого утверждения – отдельный непростой вопрос. Примером такого утверждения является теорема Гудстейна.

40 Отметим, впрочем, одно обстоятельство. Доказательство первой теоремы Гёделя о неполноте имеет конструктивный характер. То есть истинное, но невыводимое утверждение строится явно, при этом его истинность оказывается действительно совершенно тривиальной. Это конструктивное гёделевское утверждение является самоотнесенным и приблизительно может быть сформулировано так: «данное утверждение невыводимо». Если оно невыводимо, то оно тривиально истинно, и обратно. Теорема Гёделя, фактически, является средством построе-

ния истинных утверждений за пределами достижимости формальной системы (например – арифметики). Истинность Гёделевского утверждения этого типа объективно существует в мире математических форм вместе с другими теоремами арифметики, если арифметика непротиворечива. Но не все Гёделевские утверждения столь тривиальны. Примером является упомянутая уже теорема Гудстейна, и подобные случаи требуют другого анализа.

[41] *Гиндилис Л.М.* SETI: Поиск внеземного разума. М., 2004.