

Лекция 16

Мультивёрс Эверетта и математическая демократия. Проблемы космологии. Эволюция в Мультиверсе (немного философии)

Мультивёрс 3-го уровня - многомировая Вселенная Эверетта (исторически первая физическая модель мультивселенной, 1957)

Квантовая механика =
= уравнение Шредингера + коллапс волновой функции при наблюдении

Что такое коллапс волновой функции – непонятно.

Хью Эверетт:

Никакого коллапса волновой функции нет, все, включая Вселенную, описывается только уравнением Шредингера (или его обобщением), коллапс волновой функции и случайность, связанная с коллапсом – иллюзия наблюдателя, погруженного в квантовую Вселенную.

К многомировой интерпретации квантовой механики. Клонирование прибора, сознания и вселенной

$| \uparrow \rangle$ – спин вверх

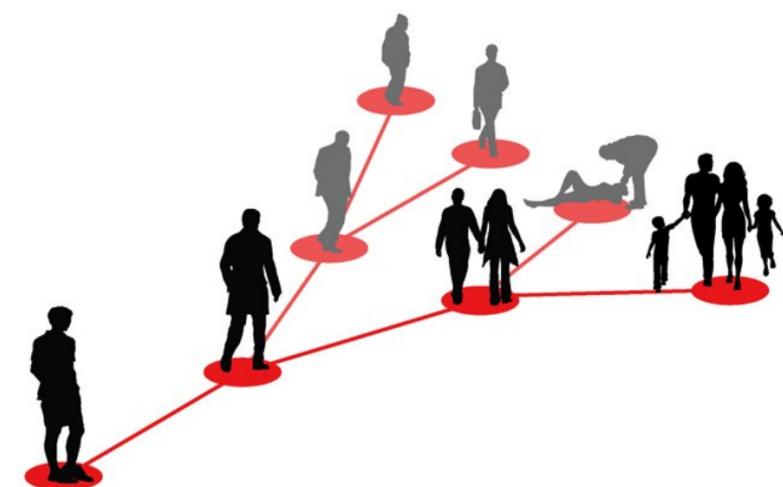
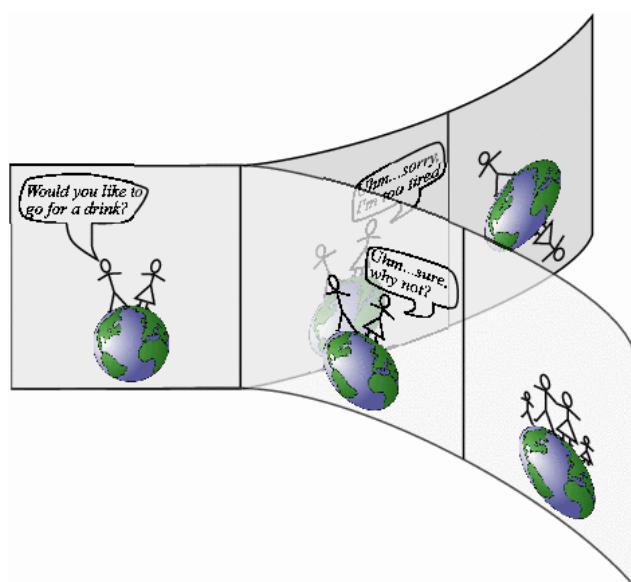
$| \downarrow \rangle$ – спин вниз

$$| \uparrow \rangle | D_0 \rangle \rightarrow | \uparrow \rangle | D_{\uparrow} \rangle; \quad | \downarrow \rangle | D_0 \rangle \rightarrow | \downarrow \rangle | D_{\downarrow} \rangle$$

$$(a| \uparrow \rangle + b| \downarrow \rangle) | D_0 \rangle \rightarrow a| \uparrow \rangle | D_{\uparrow} \rangle + b| \downarrow \rangle | D_{\downarrow} \rangle$$

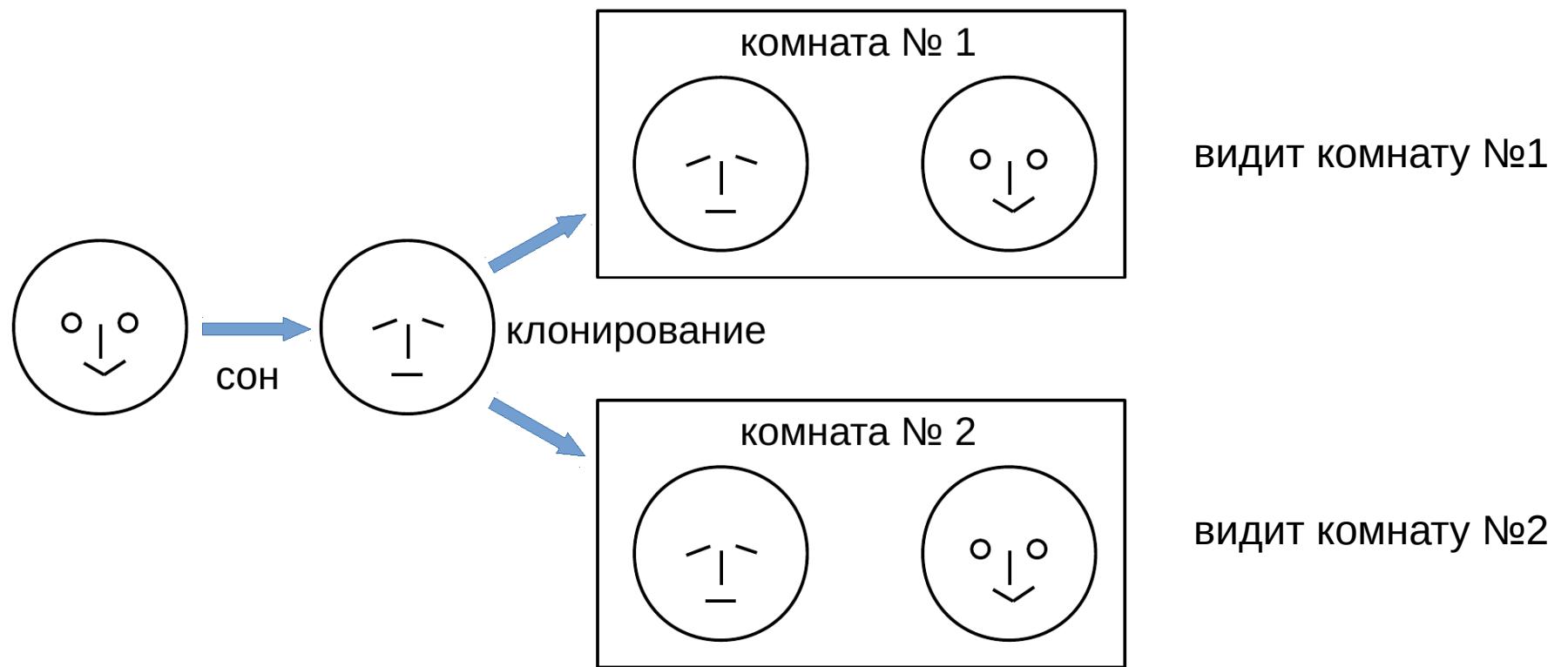
$$(a| \uparrow \rangle + b| \downarrow \rangle) | D_0 \rangle | M_0 \rangle \rightarrow a| \uparrow \rangle | D_{\uparrow} \rangle | M_{\uparrow} \rangle + b| \downarrow \rangle | D_{\downarrow} \rangle | M_{\downarrow} \rangle$$

$$(a| \uparrow \rangle + b| \downarrow \rangle) | D_0 \rangle | M_0 \rangle | U_0 \rangle \rightarrow a| \uparrow \rangle | D_{\uparrow} \rangle | M_{\uparrow} \rangle | U_{\uparrow} \rangle + b| \downarrow \rangle | D_{\downarrow} \rangle | M_{\downarrow} \rangle | U_{\downarrow} \rangle$$



Как клонирование сознания порождает иллюзию случайности

Мысленный эксперимент Макса Тегмарка - клонирование



Случайности нет, но каждый из клонов субъективно воспринимает случайный результат 1 или 2

Если человеческое сознание заменить на ИИ, то эксперимент будет не мысленный, а вполне реальный.

Не безумие ли предполагать, что вся Вселенная находится в квантовом состоянии, описываемом единственной волновой функцией?

Анизотропия микроволнового фона описывается квантовыми флуктуациями масштаба видимой части вселенной и правильно предсказывается в предположении, что все поле инфлятора – единый квантовый объект

Квантовая теория на уровне всей видимой Вселенной дает предсказания, подтверждаемые экспериментом

Вся совокупность квантовых миров многомировой интерпретации Эверетта - Мультивёрс 3-го уровня.

В каком смысле вселенные Мультиверса существуют при том, что все они прямо недоступны наблюдению?

Другие вселенные входят в теорию, которая дает правильные предсказания для эксперимента, и без этих объектов работать не может.

Мультивёрс 4-го уровня - математический Мультивёрс Макса Тегмарка

Природа математики

Каков триллионный знак десятичного разложения $\sqrt{2}$?

Кто бы ни считал, ответ будет один и тот же, так как этот объект объективно существовал еще до того, как его кто-то взялся считать.

Мир математических форм существует объективно.

Мир математических форм – часть реальности, а не выдумка

Природа элементарных объектов физики

Либо при описании элементарных объектов физики будет иметь место регрессия в бесконечность (это плохо)

Либо регрессия оборвется, и тогда самые элементарные объекты будут иметь чисто математическое внешнее описание.

На этом уровне различие между математикой и физикой исчезает.

Гипотеза: Наблюдаемый нами мир есть математическая структура.

Вопрос: почему именно такая математическая структура, которая предписывает именно те законы природы, которые мы наблюдаем? Чем она выделена?

Ответ (Тегмарк): В принципе, она ничем не выделена; все непротиворечивые математические структуры есть реальные вселенные.

Имеет место математическая демократия → все непротиворечивые математические структуры образуют Мультиверс 4-го уровня, наша частная математическая структура есть один из объектов математического Мультивёрса.

Наша математическая структура отличается тем, что допускает внутри себя существование Само Сознающей Субструктуры (ССС).

Возможность существования ССС определяет «тонкую настройку» нашей (математической) Вселенной на наше существование – вариант слабого антропного принципа.

Единственный постулат «теории всего»:
Все непротиворечивые математические структуры существуют физически.

Следствие:

В принципе это означает, что Вселенная абсолютно познаваема: надо только включить воображение и двигаться по пути этого познания.

Камень в огород хаотической инфляции: Теория Хорндески и космология отскока

Horndeski's theory can be written in terms of an [action](#) as^[4]

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\sum_{i=2}^5 \frac{1}{8\pi G_N} \mathcal{L}_i[g_{\mu\nu}, \phi] + \mathcal{L}_m[g_{\mu\nu}, \psi_M] \right]$$

with the [Lagrangian densities](#)

$$\mathcal{L}_2 = G_2(\phi, X)$$

$$\mathcal{L}_3 = G_3(\phi, X) \square \phi$$

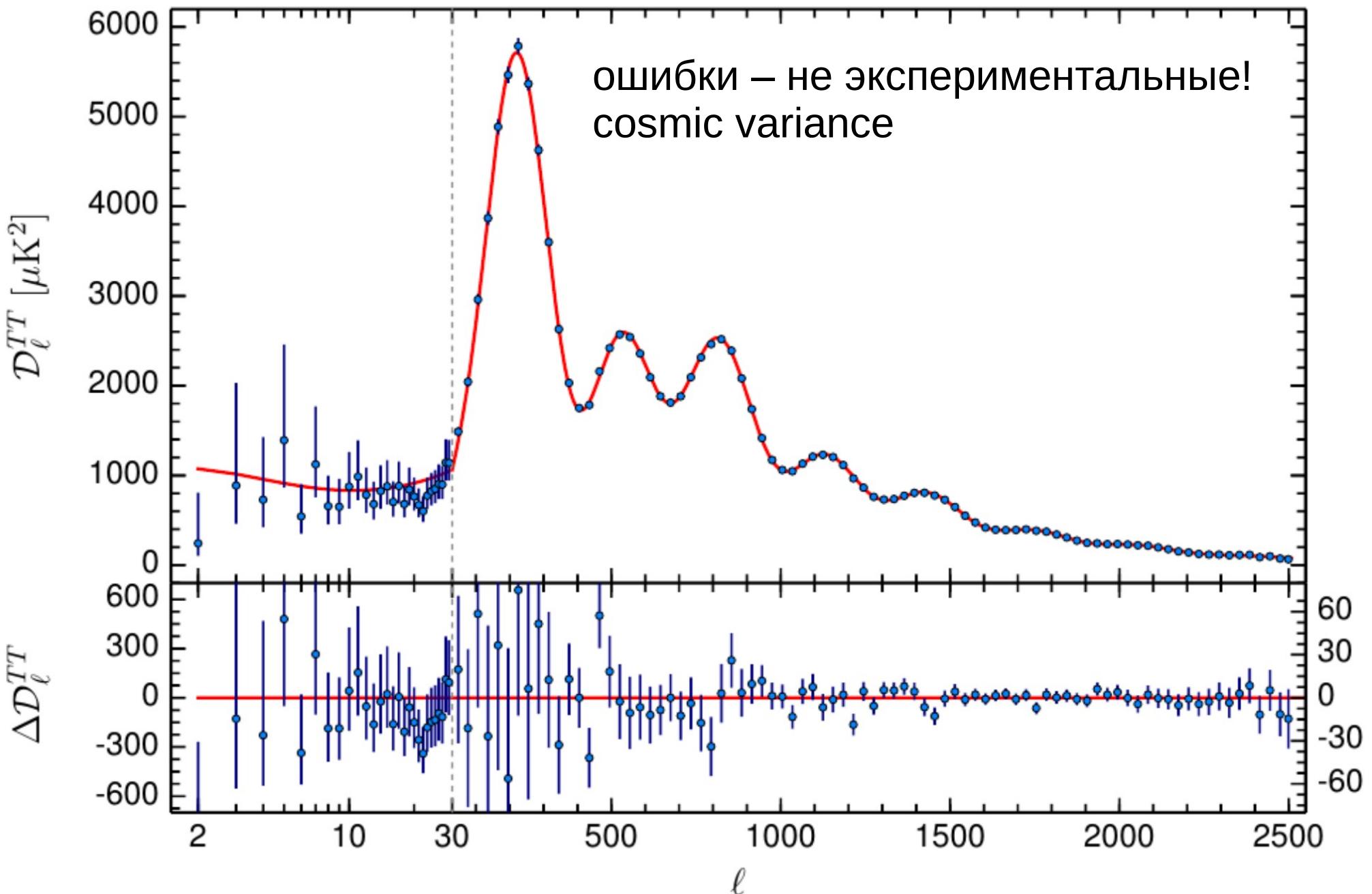
$$\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X) R + G_{4,X}(\phi, X) \left[(\square \phi)^2 - \phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu} \right]$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(\phi, X) G_{\mu\nu} \phi^{;\mu\nu} - \frac{1}{6} G_{5,X}(\phi, X) \left[(\square \phi)^3 + 2\phi_{;\mu}{}^\nu \phi_{;\nu}{}^\alpha \phi_{;\alpha}{}^\mu - 3\phi_{;\mu\nu} \phi^{;\mu\nu} \square \phi \right]$$

Here G_N is [Newton's constant](#), \mathcal{L}_m represents the matter Lagrangian, G_2 to G_5 are generic functions of ϕ and X , $R, G_{\mu\nu}$ are the [Ricci scalar](#) and [Einstein tensor](#), $g_{\mu\nu}$ is the [Jordan frame metric](#), semicolon indicates [covariant derivatives](#), commas indicate [partial derivatives](#), $\square \phi \equiv g^{\mu\nu} \phi_{;\mu\nu}$, $X \equiv -1/2g^{\mu\nu} \phi_{;\mu} \phi_{;\nu}$ and repeated indices are summed over following [Einstein's convention](#).

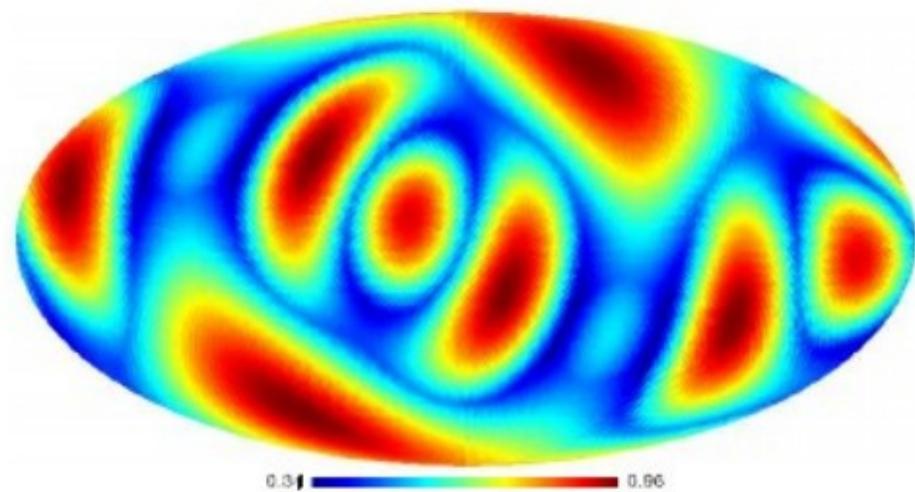
Проблемы космологии

Проблема мультиполей $l \sim 20$

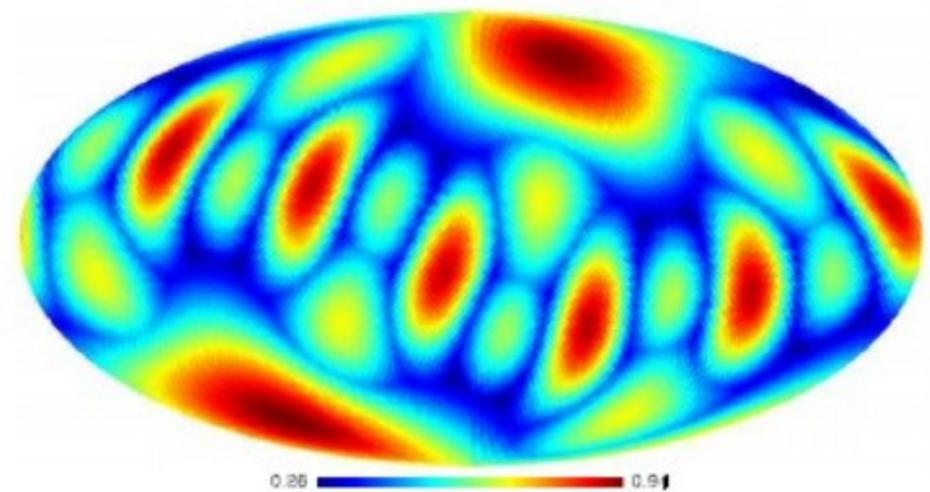


Провал спектра в области $l \sim 20$ очень маловероятен (но возможен).

Ось зла



$l = 2$



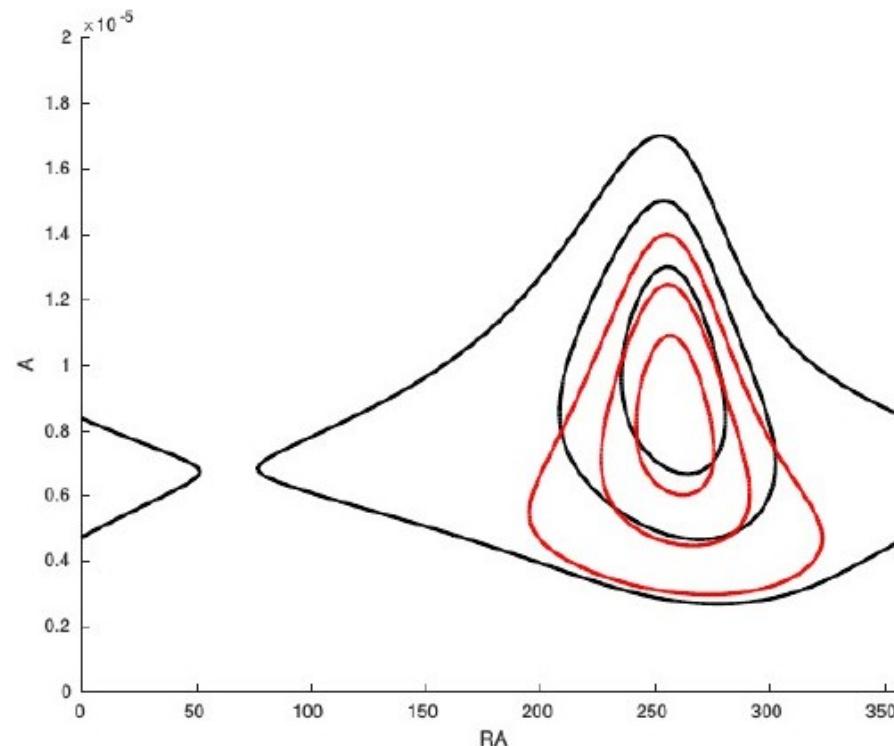
$l = 3$

«Ось зла»: неслучайное совпадение направлений осей квадруполя и октуполя (и даже $l = 4$) на уровне ~95%

Австралийский диполь

A. M. M. Pinho, C. J. A. P. Martins, Phys. Lett. B 756 (2016), 121-125

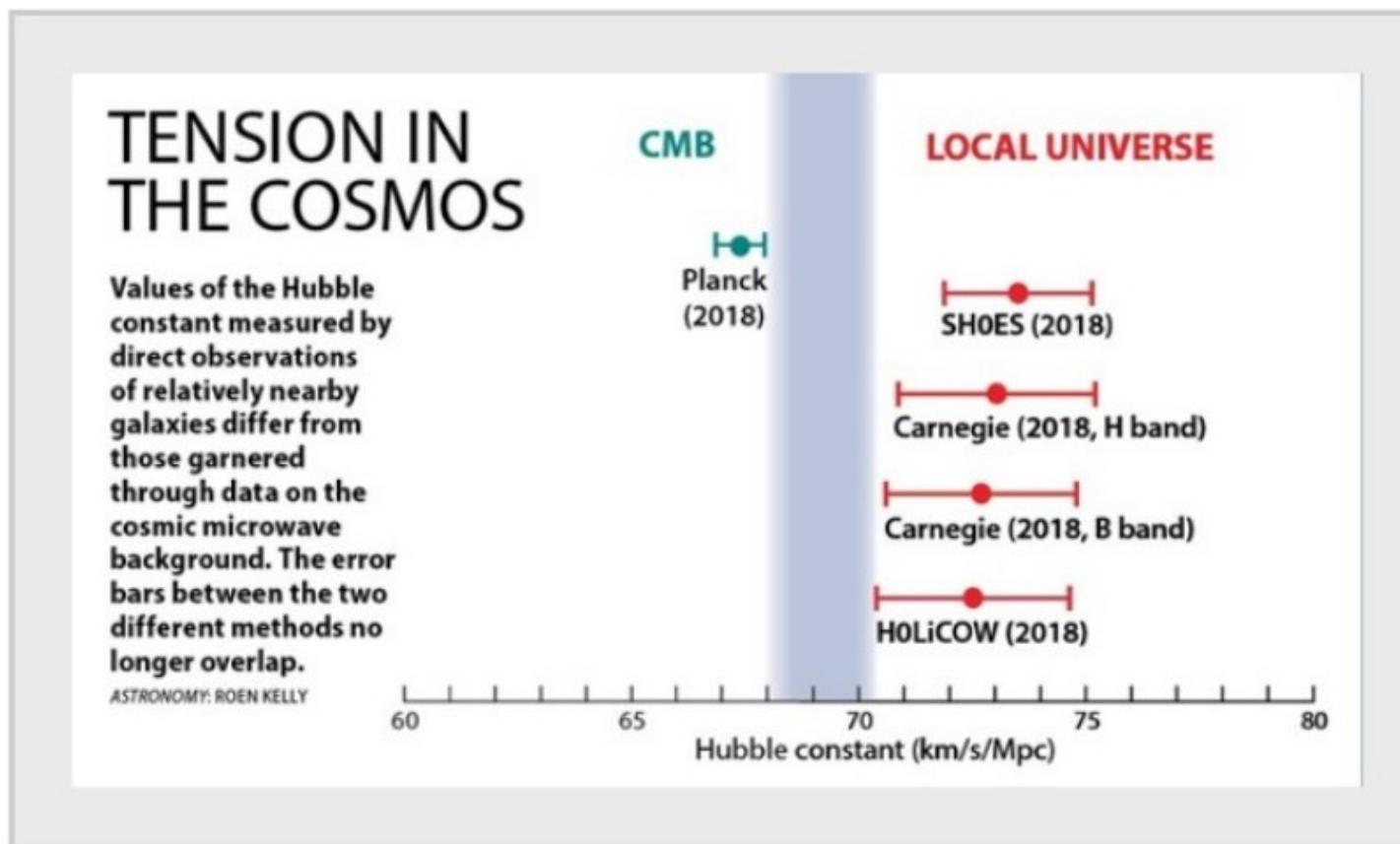
Пространственная вариация постоянной тонкой структуры дипольного типа



Dataset & c.l.	Amplitude (ppm)	Right Ascension (h)	Declination ($^{\circ}$)
Webb <i>et al.</i> (68.3%)	9.9 ± 2.3	17.2 ± 1.0	-61 ± 11
Webb <i>et al.</i> (99.7%)	9.9 ± 6.9	$17.2^{+5.0}_{-5.9}$	< -27
All data (68.3%)	8.7 ± 1.7	17.2 ± 0.7	-59 ± 8
All data (99.7%)	8.7 ± 5.1	17.2 ± 3.1	< -38

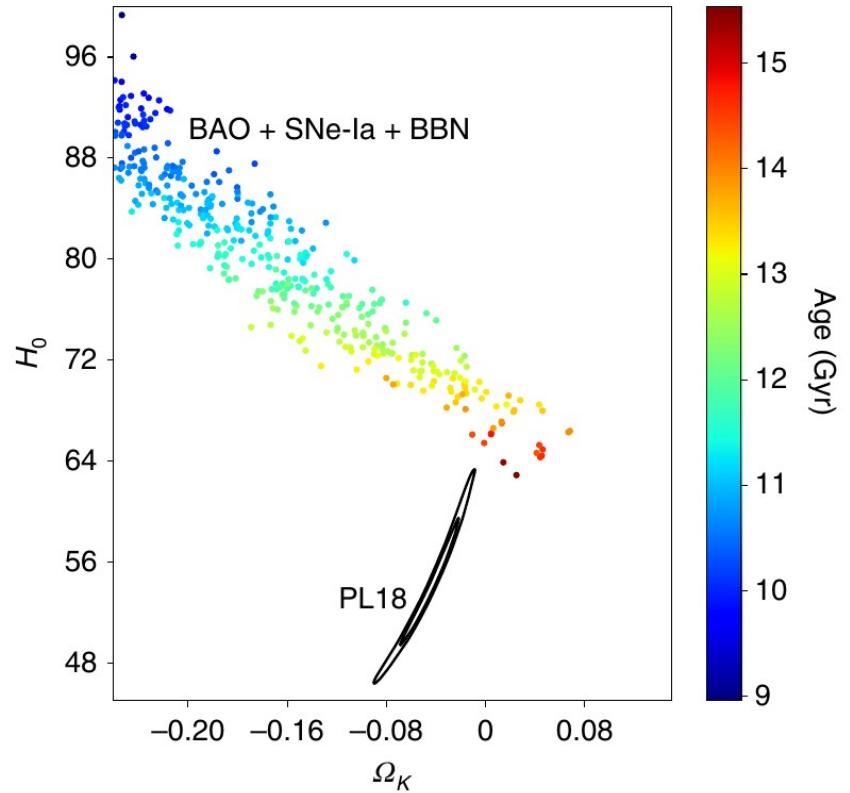
H0-tension:

Значение постоянной Хаббла, измеренные по микроволновому фону и по локальным данным противоречат друг другу



<https://astronomy.com/magazine/2019/06/tension-at-the-heart-of-cosmology>

Данные обсерватории Planck плохо согласуются с результатами других космологических наблюдений



BAO – Baryon Acoustic Oscillations

BBN – Big Bang Nucleosynthesis

Варианты объяснения результатов Planck:

1. Новая физика
2. Систематика Planck
3. Статистическая флуктуация $\sim 3\sigma$

Плоская ли Вселенная?

4 ноября 2019 г., Nature astronomy

nature
astronomy

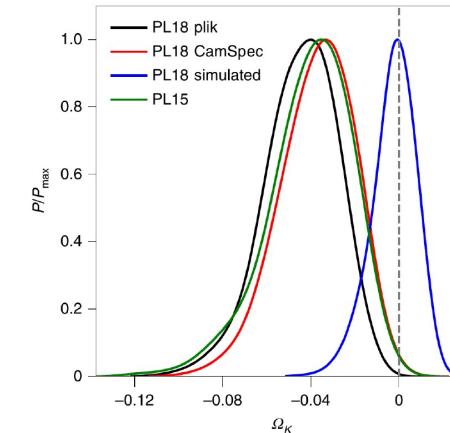
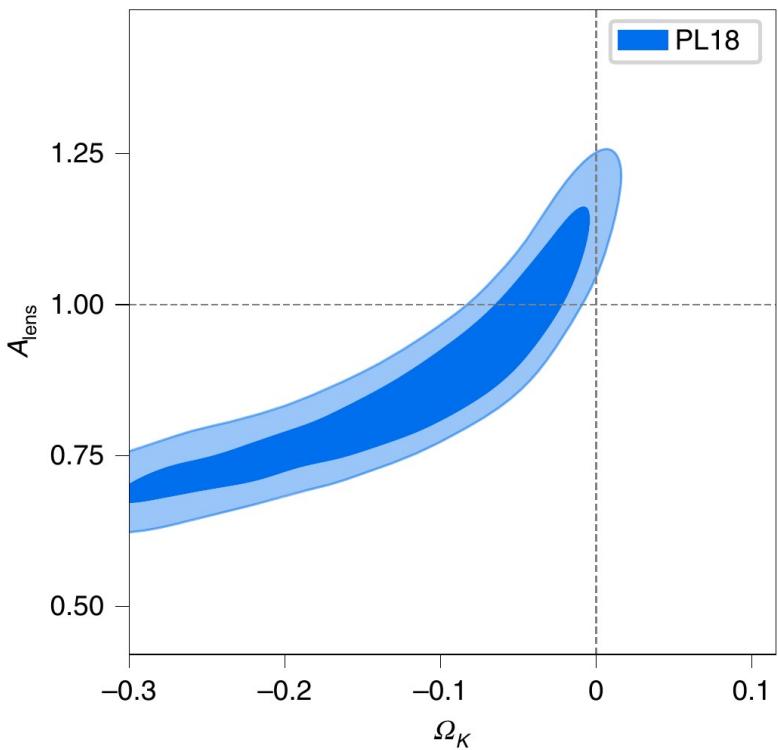
ARTICLES

<https://doi.org/10.1038/s41550-019-0906-9>

Planck evidence for a closed Universe and a possible crisis for cosmology

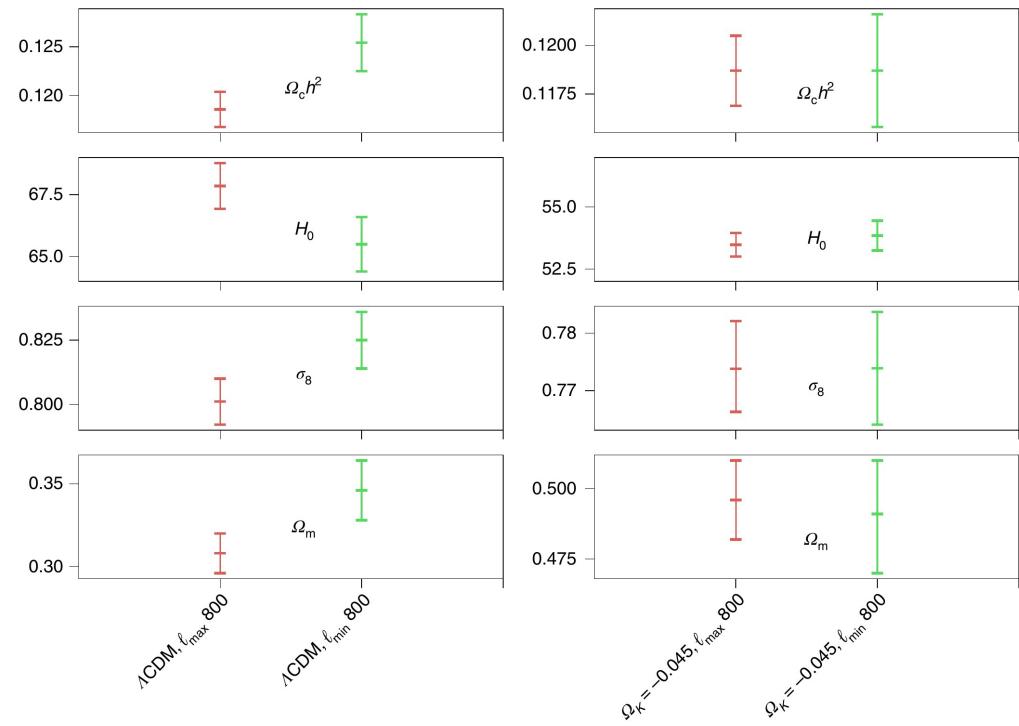
Eleonora Di Valentino¹, Alessandro Melchiorri^{1,2*} and Joseph Silk^{3,4,5}

The recent Planck Legacy 2018 release has confirmed the presence of an enhanced lensing amplitude in cosmic microwave background power spectra compared with that predicted in the standard Λ cold dark matter model, where Λ is the cosmological constant. A closed Universe can provide a physical explanation for this effect, with the Planck cosmic microwave background spectra now preferring a positive curvature at more than the 99% confidence level. Here, we further investigate the evidence for a closed Universe from Planck, showing that positive curvature naturally explains the anomalous lensing amplitude, and demonstrating that it also removes a well-known tension in the Planck dataset concerning the values of cosmological parameters derived at different angular scales. We show that since the Planck power spectra prefer a closed Universe, discordances higher than generally estimated arise for most of the local cosmological observables, including baryon acoustic oscillations. The assumption of a flat Universe could therefore mask a cosmological crisis where disparate observed properties of the Universe appear to be mutually inconsistent. Future measurements are needed to clarify whether the observed discordances are due to undetected systematics, or to new physics or simply a statistical fluctuation.



99.985% $\Omega_K < 0$
Best fit:
 $\Omega_K = -0.0438$

Космологические параметры, определенные по разным углам:



$$\Omega_c \equiv \Omega_{CDM}$$

σ_8 – современный контраст неоднородности плотности материи на масштабе $8h^{-1}$ Мпк (стандартная величина по историческим причинам)

Проблема конфликта параметров для разных угловых масштабах исчезает, если принять $\Omega_K = -0.045$ ($\Omega = 1.045$).

Как получить положительную кривизну?

A.D. Linde, arXiv:astro-ph/0303245

Can we have inflation with $\Omega > 1$?

Andrei Linde

Department of Physics, Stanford University, Stanford, CA 94305-4060, USA
(Dated: March 11, 2003)

It is very difficult to obtain a realistic model of a closed inflationary universe. Even if one fine-tunes the total number of e-folds to be sufficiently small, the resulting universe typically has $\frac{\delta\rho}{\rho} \sim \frac{\Delta T}{T} = O(1)$ on the scale of the horizon. We describe a class of models where this problem can be resolved. The models are unattractive and fine-tuned, so the flatness of the universe remains a generic prediction of inflationary cosmology. Nevertheless one should keep in mind that with the fine-tuning at the level of about one percent one can obtain a semi-realistic model of an inflationary universe with $\Omega > 1$. The spectrum of density perturbations in this model may have a cut-off on the scale of the horizon. Similar approach may be valid in application to a compact inflationary universe with a nontrivial topology.

PACS numbers: PACS: 98.80.Cq, astro-ph/0303245

- Требуется тонкая подгонка N_e :

N_e	Ω
59.5	1.03
60	1.1
60.5	1.3

- Так как вселенная разувается слабо, то и неоднородности разглаживаются слабо. Для $\Omega_K \sim -0.1$ получается $\delta\rho/\rho \sim 1$ на уровне масштаба горизонта.
- Модель с возмущениями $\delta\rho/\rho \sim 5 \times 10^{-5}$ и кривизной $\Omega_K \sim -0.1$ должна быть чем-то очень противовесственным

- Например: Пузырь пространства, возникающий благодаря квантовому туннелированию из другой фазы, имеет тенденцию быть однородным и сферически симметричным, если вероятность туннелирования очень мала \Rightarrow начальных неоднородностей, которые нужно было разглаживать, нет.

- Потенциал $V(\varphi)$ имеет вид (оч. крутой, чтобы N_e было мало):

$$V(\varphi) = \frac{m^2 \varphi^2}{2} \exp \left[\left(\frac{\varphi}{CM_{Pl}} \right)^2 \right] \quad (16.1)$$

(C – некоторая константа). Такие потенциалы естественно появляются в супергравитации.

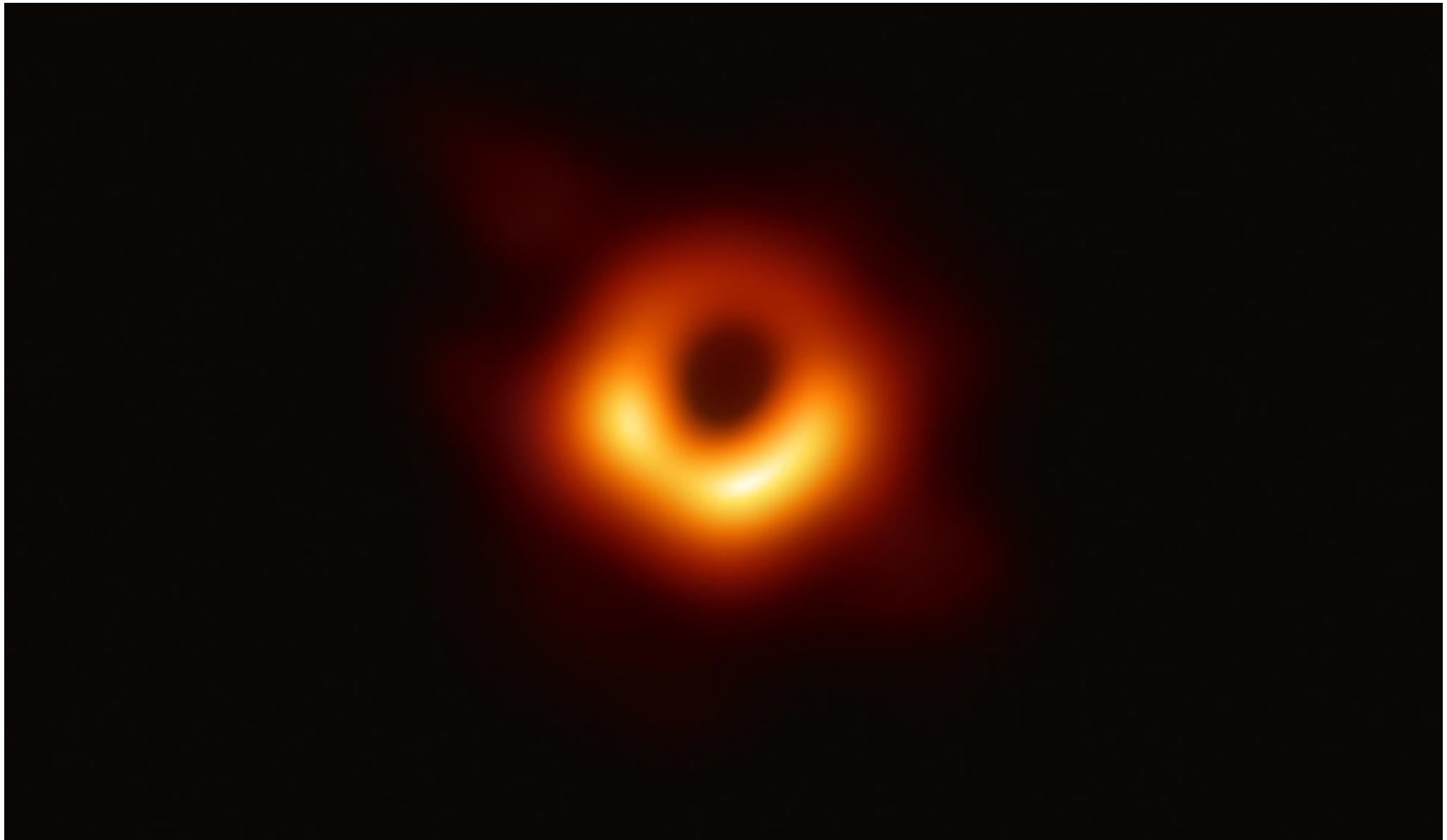
Нужно: $N_e \sim \exp(2\pi C^2) \Rightarrow C = 3$ с точностью в несколько процентов. Инфляция продолжается только в узком интервале $M_{Pl}/2 \lesssim \varphi \lesssim CM_{Pl}$. Очень жесткие условия!

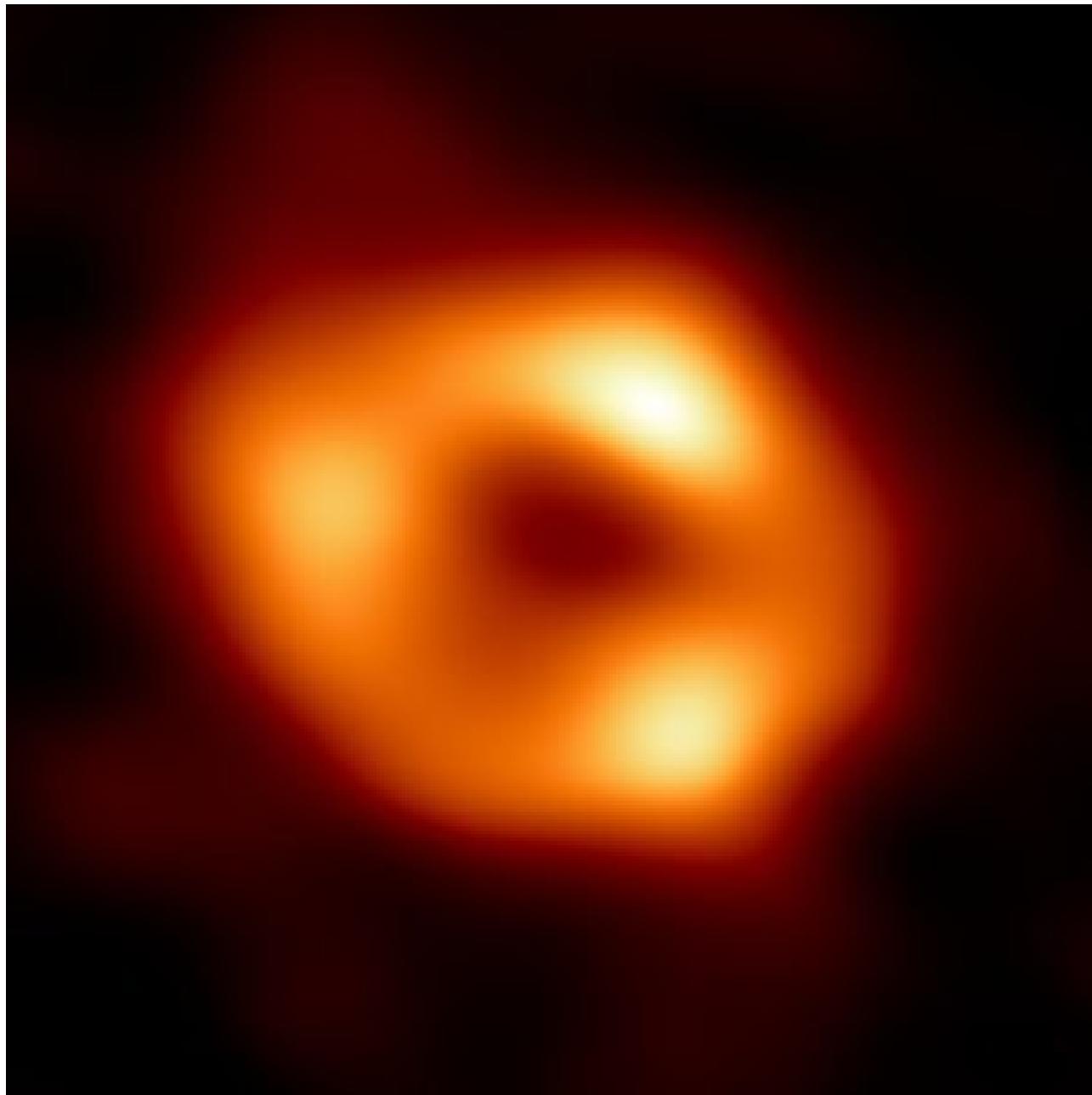
- Все эти условия реализуются только с очень маленькой вероятностью и выглядят противоестественными.

All of the proposed models describing a closed (compact) inflationary universe are artificial and fine-tuned.

Проблема сверхмассивных черных дыр в центрах галактик

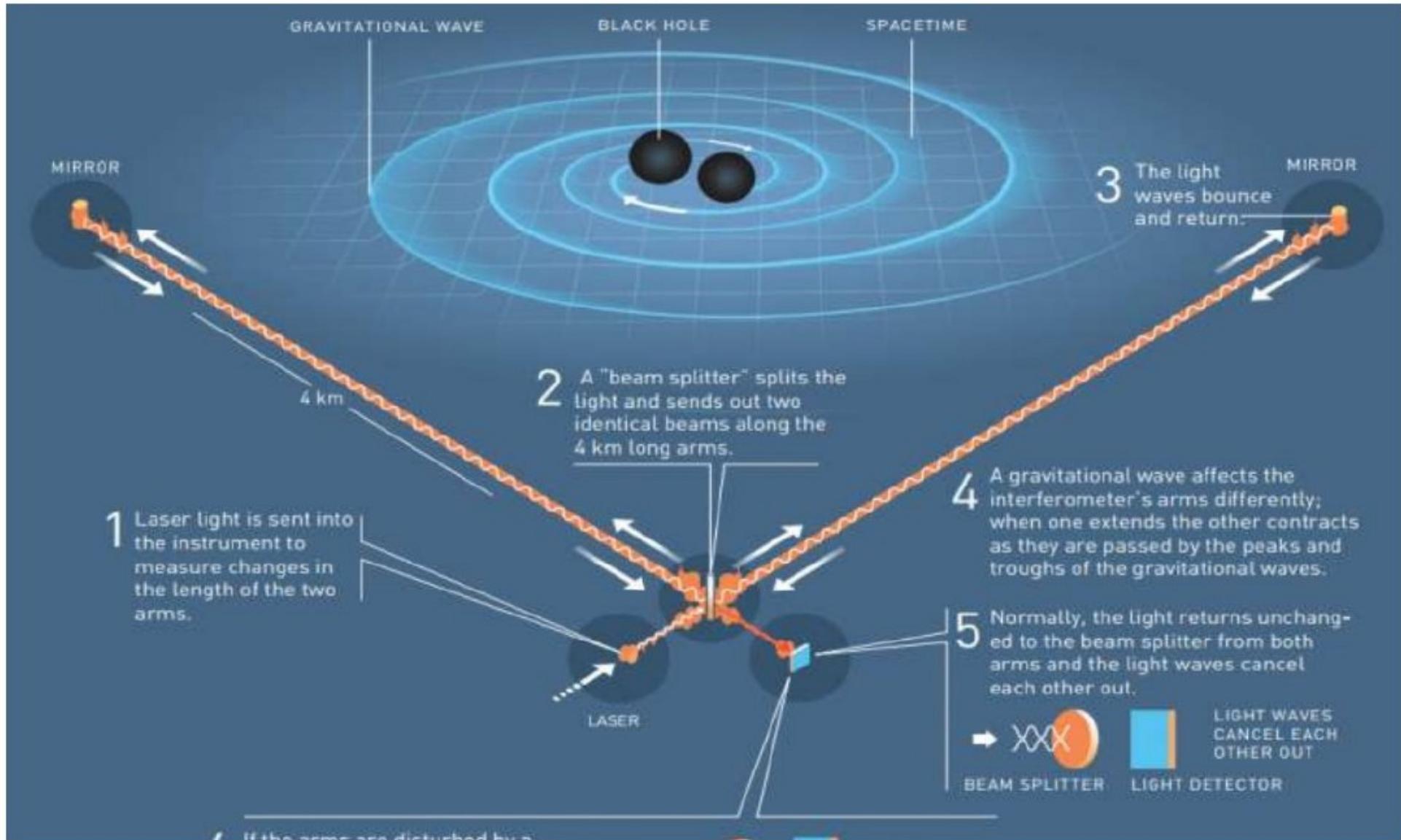
Аккреционный диск сверхмассивной черной дыры ~ 4 млрд солнечных масс в галактике M87



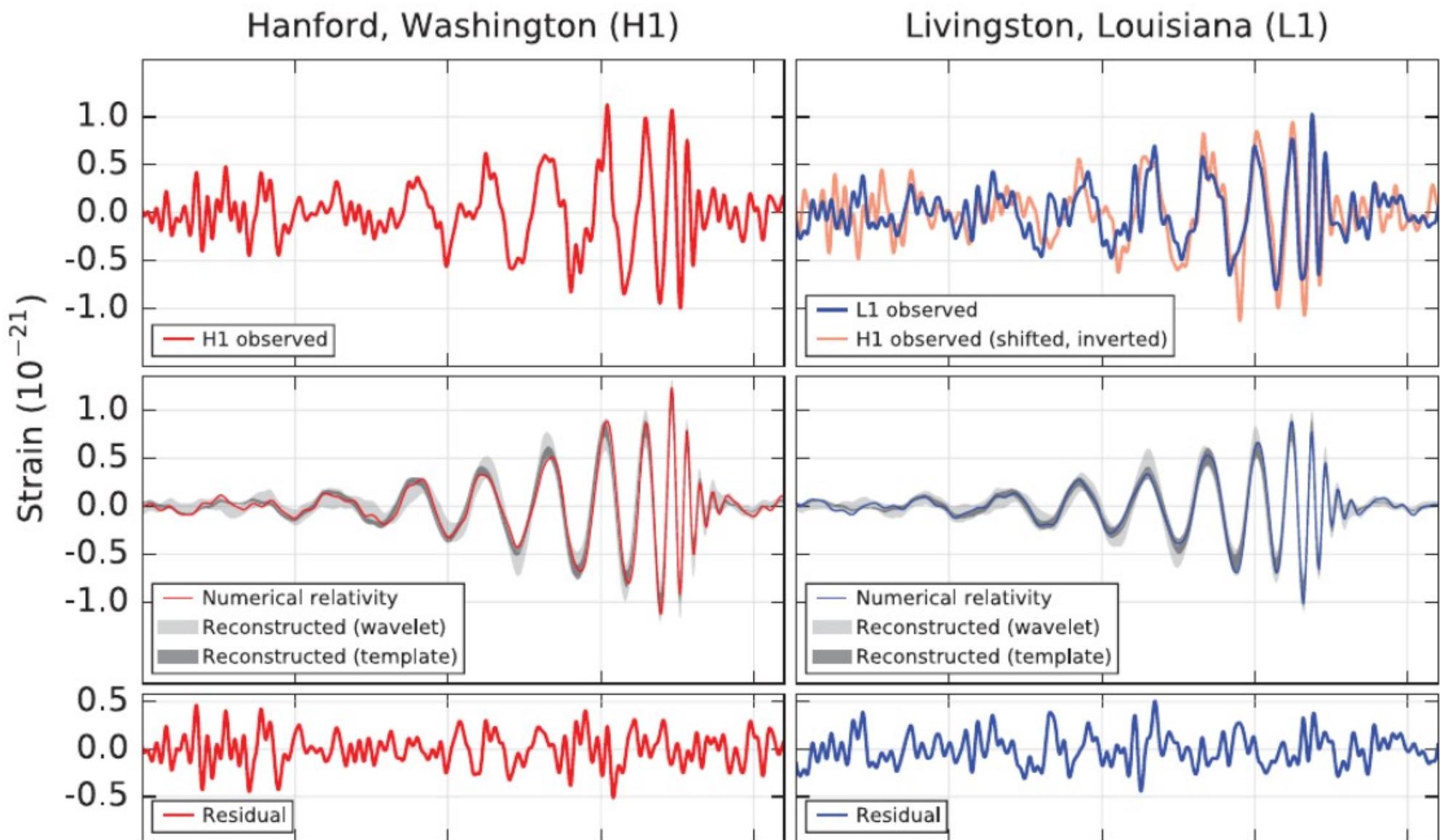


Аккреционный диск сверхмассивной черной дыры 4.3 млн солнечных масс в галактике Млечный путь Стрелец A*

Гравитационные волны сливающихся черных дыр (2015)



Волновые формы детекторов



Name	Version	Release	GPS ↓	Mass 1 (M _⊙)	Mass 2 (M _⊙)	Network SNR	Distance (Mpc)	X _{eff}	Chirp Mass (M _⊙)	Re
GW170823	v1	GWTC-1-confident	1187529256.5	+11.2 39.5 -6.7	+6.7 29.0 -7.8	11.5	1940 +970 -900	+0.22 0.09 -0.26	+4.6 29.2 -3.6	0.
GW170818	v1	GWTC-1-confident	1187058327.1	+7.5 35.4 -4.7	+4.3 26.7 -5.2	11.3	1060 +420 -380	+0.18 -0.09 -0.21	+2.1 26.5 -1.7	0.
GW170817	v3	GWTC-1-confident	1187008882.4	+0.12 1.46 -0.10	+0.09 1.27 -0.09	33.0	40 +7 -15	+0.02 0.00 -0.01	+0.001 1.186 -0.001	0.
GW170814	v3	GWTC-1-confident	1186741861.5	+5.6 30.6 -3.0	+2.8 25.2 -4.0	15.9	600 +150 -220	+0.12 0.07 -0.12	+1.4 24.1 -1.1	0.
GW170809	v1	GWTC-1-confident	1186302519.8	+8.3 35.0 -5.9	+5.1 23.8 -5.2	12.4	1030 +320 -390	+0.17 0.08 -0.17	+2.1 24.9 -1.7	0.
GW170729	v1	GWTC-1-confident	1185389807.3	+16.2 50.2 -10.2	+9.1 34.0 -10.1	10.2	2840 +1400 -1360	+0.21 0.37 -0.25	+6.5 35.4 -4.8	0.
GW170608	v3	GWTC-1-confident	1180922494.5	+5.5 11.0 -1.7	+1.4 7.6 -2.2	14.9	320 +120 -110	+0.19 0.03 -0.07	+0.2 7.9 -0.2	0.
GW170104	v2	GWTC-1-confident	1167559936.6	+7.3 30.8 -5.6	+4.9 20.0 -4.6	13.0	990 +440 -430	+0.17 -0.04 -0.21	+2.2 21.4 -1.8	0.
GW151226	v2	GWTC-1-confident	1135136350.6	+8.8 13.7 -3.2	+2.2 7.7 -2.5	13.1	450 +180 -190	+0.20 0.18 -0.12	+0.3 8.9 -0.3	0.
GW151012	v3	GWTC-1-confident	1128678900.4	+14.9 23.2 -5.5	+4.1 13.6 -4.8	10.0	1080 +550 -490	+0.31 0.05 -0.20	+2.1 15.2 -1.2	0.
GW150914	v3	GWTC-1-confident	1126259462.4	+4.7 35.6 -3.1	+3.0 30.6 -4.4	24.4	440 +150 -170	+0.12 -0.01 -0.13	+1.7 28.6 -1.5	0.

Event	M (M_{\odot})	\mathcal{M} (M_{\odot})	m_1 (M_{\odot})	m_2 (M_{\odot})	χ_{eff}	D_{L} (Gpc)	z	M_{f} (M_{\odot})	χ_{f}	$\Delta\Omega$ (deg 2)	SNR
GW190408_181802	42.9 $^{+4.1}_{-2.9}$	18.3 $^{+1.8}_{-1.2}$	24.5 $^{+5.1}_{-3.4}$	18.3 $^{+3.2}_{-3.5}$	-0.03 $^{+0.13}_{-0.19}$	1.58 $^{+0.40}_{-0.59}$	0.30 $^{+0.06}_{-0.10}$	41.0 $^{+3.8}_{-2.7}$	0.67 $^{+0.06}_{-0.07}$	140	15.3 $^{+0.2}_{-0.3}$
GW190412	38.4 $^{+3.8}_{-3.7}$	13.3 $^{+0.4}_{-0.3}$	30.0 $^{+4.7}_{-5.1}$	8.3 $^{+1.6}_{-0.9}$	0.25 $^{+0.08}_{-0.11}$	0.74 $^{+0.14}_{-0.17}$	0.15 $^{+0.03}_{-0.03}$	37.3 $^{+3.9}_{-3.9}$	0.67 $^{+0.05}_{-0.06}$	21	18.9 $^{+0.2}_{-0.3}$
GW190413_052954	56.9 $^{+13.1}_{-8.9}$	24.0 $^{+5.4}_{-3.7}$	33.4 $^{+12.4}_{-7.4}$	23.4 $^{+6.7}_{-6.3}$	0.01 $^{+0.29}_{-0.33}$	4.10 $^{+2.41}_{-0.89}$	0.66 $^{+0.30}_{-0.27}$	54.3 $^{+12.4}_{-8.4}$	0.69 $^{+0.12}_{-0.13}$	1400	8.9 $^{+0.4}_{-0.8}$
GW190413_134308	76.1 $^{+15.9}_{-10.6}$	31.9 $^{+7.3}_{-4.6}$	45.4 $^{+13.6}_{-9.6}$	30.9 $^{+10.2}_{-9.6}$	-0.01 $^{+0.24}_{-0.28}$	5.15 $^{+2.44}_{-2.34}$	0.80 $^{+0.30}_{-0.31}$	72.8 $^{+15.2}_{-10.3}$	0.69 $^{+0.10}_{-0.12}$	520	10.0 $^{+0.4}_{-0.5}$
GW190421_213856	71.8 $^{+12.5}_{-8.6}$	30.7 $^{+5.5}_{-3.9}$	40.6 $^{+10.4}_{-6.6}$	31.4 $^{+7.5}_{-8.2}$	-0.05 $^{+0.23}_{-0.26}$	3.15 $^{+1.37}_{-1.42}$	0.53 $^{+0.18}_{-0.21}$	68.6 $^{+11.7}_{-8.1}$	0.68 $^{+0.10}_{-0.11}$	1000	10.7 $^{+0.2}_{-0.4}$
GW190424_180648	70.7 $^{+13.4}_{-9.8}$	30.3 $^{+5.7}_{-4.2}$	39.5 $^{+10.9}_{-6.9}$	31.0 $^{+7.4}_{-7.3}$	0.15 $^{+0.22}_{-0.22}$	2.55 $^{+1.56}_{-1.33}$	0.45 $^{+0.22}_{-0.21}$	67.1 $^{+12.5}_{-9.2}$	0.75 $^{+0.08}_{-0.09}$	26000	10.4 $^{+0.2}_{-0.4}$
GW190425	3.4 $^{+0.3}_{-0.1}$	1.44 $^{+0.02}_{-0.02}$	2.0 $^{+0.6}_{-0.3}$	1.4 $^{+0.3}_{-0.3}$	0.06 $^{+0.11}_{-0.05}$	0.16 $^{+0.07}_{-0.07}$	0.03 $^{+0.01}_{-0.02}$	-	-	9900	12.4 $^{+0.3}_{-0.4}$
GW190426_152155	7.2 $^{+3.5}_{-1.5}$	2.41 $^{+0.08}_{-0.08}$	5.7 $^{+4.0}_{-2.3}$	1.5 $^{+0.8}_{-0.5}$	-0.03 $^{+0.33}_{-0.30}$	0.38 $^{+0.19}_{-0.16}$	0.08 $^{+0.04}_{-0.03}$	-	-	1400	8.7 $^{+0.5}_{-0.6}$
GW190503_185404	71.3 $^{+9.3}_{-8.0}$	30.1 $^{+4.2}_{-4.0}$	42.9 $^{+9.2}_{-7.8}$	28.5 $^{+7.5}_{-7.9}$	-0.02 $^{+0.20}_{-0.26}$	1.52 $^{+0.71}_{-0.66}$	0.29 $^{+0.11}_{-0.11}$	68.2 $^{+8.7}_{-7.8}$	0.67 $^{+0.09}_{-0.12}$	94	12.4 $^{+0.2}_{-0.3}$
GW190512_180714	35.6 $^{+3.9}_{-3.4}$	14.5 $^{+1.3}_{-1.0}$	23.0 $^{+5.4}_{-5.7}$	12.5 $^{+3.5}_{-2.5}$	0.03 $^{+0.13}_{-0.13}$	1.49 $^{+0.53}_{-0.59}$	0.28 $^{+0.09}_{-0.10}$	34.2 $^{+3.9}_{-3.4}$	0.65 $^{+0.07}_{-0.07}$	230	12.2 $^{+0.2}_{-0.4}$
GW190513_205428	53.6 $^{+8.6}_{-5.9}$	21.5 $^{+3.6}_{-1.9}$	35.3 $^{+9.6}_{-9.0}$	18.1 $^{+7.3}_{-4.2}$	0.12 $^{+0.29}_{-0.18}$	2.16 $^{+0.94}_{-0.80}$	0.39 $^{+0.14}_{-0.13}$	51.3 $^{+8.1}_{-5.8}$	0.69 $^{+0.14}_{-0.12}$	490	12.9 $^{+0.3}_{-0.4}$
GW190514_065416	64.2 $^{+16.6}_{-9.6}$	27.4 $^{+6.9}_{-4.3}$	36.9 $^{+13.4}_{-7.3}$	27.5 $^{+8.2}_{-7.7}$	-0.16 $^{+0.28}_{-0.32}$	4.93 $^{+2.76}_{-2.41}$	0.77 $^{+0.34}_{-0.33}$	61.6 $^{+16.0}_{-9.2}$	0.64 $^{+0.11}_{-0.14}$	2400	8.2 $^{+0.3}_{-0.6}$
GW190517_055101	61.9 $^{+10.0}_{-9.6}$	26.0 $^{+4.2}_{-4.0}$	36.4 $^{+11.8}_{-7.8}$	24.8 $^{+6.9}_{-7.1}$	0.53 $^{+0.20}_{-0.19}$	2.11 $^{+1.79}_{-1.00}$	0.38 $^{+0.26}_{-0.16}$	57.8 $^{+9.4}_{-9.1}$	0.87 $^{+0.05}_{-0.07}$	460	10.7 $^{+0.4}_{-0.6}$
GW190519_153544	104.2 $^{+14.5}_{-14.9}$	43.5 $^{+6.8}_{-6.8}$	64.5 $^{+11.3}_{-13.2}$	39.9 $^{+11.0}_{-10.6}$	0.33 $^{+0.19}_{-0.22}$	2.85 $^{+2.02}_{-1.14}$	0.49 $^{+0.27}_{-0.17}$	98.7 $^{+13.5}_{-14.2}$	0.80 $^{+0.07}_{-0.12}$	770	15.6 $^{+0.2}_{-0.3}$
GW190521	157.9 $^{+37.4}_{-20.9}$	66.9 $^{+15.5}_{-9.2}$	91.4 $^{+29.3}_{-17.5}$	66.8 $^{+20.7}_{-20.7}$	0.06 $^{+0.31}_{-0.37}$	4.53 $^{+2.30}_{-2.13}$	0.72 $^{+0.29}_{-0.29}$	150.3 $^{+35.8}_{-20.0}$	0.73 $^{+0.11}_{-0.14}$	940	14.2 $^{+0.3}_{-0.3}$
GW190521_074359	74.4 $^{+6.8}_{-4.6}$	31.9 $^{+3.1}_{-2.4}$	42.1 $^{+5.9}_{-4.9}$	32.7 $^{+5.4}_{-6.2}$	0.09 $^{+0.10}_{-0.13}$	1.28 $^{+0.38}_{-0.57}$	0.25 $^{+0.06}_{-0.10}$	70.7 $^{+6.4}_{-4.2}$	0.72 $^{+0.05}_{-0.07}$	500	25.8 $^{+0.1}_{-0.2}$
GW190527_092055	58.5 $^{+27.9}_{-10.6}$	24.2 $^{+11.9}_{-4.4}$	36.2 $^{+19.1}_{-9.5}$	22.8 $^{+12.7}_{-8.1}$	0.13 $^{+0.29}_{-0.28}$	3.10 $^{+4.85}_{-1.64}$	0.53 $^{+0.61}_{-0.25}$	55.9 $^{+26.4}_{-10.1}$	0.73 $^{+0.12}_{-0.16}$	3800	8.1 $^{+0.4}_{-1.0}$
GW190602_175927	114.1 $^{+18.5}_{-15.7}$	48.3 $^{+8.6}_{-8.0}$	67.2 $^{+16.0}_{-12.6}$	47.4 $^{+13.4}_{-16.6}$	0.10 $^{+0.25}_{-0.25}$	2.99 $^{+2.02}_{-1.26}$	0.51 $^{+0.27}_{-0.19}$	108.8 $^{+17.2}_{-14.8}$	0.71 $^{+0.10}_{-0.13}$	720	12.8 $^{+0.2}_{-0.3}$
GW190620_030421	90.1 $^{+17.3}_{-12.1}$	37.5 $^{+7.8}_{-5.7}$	55.4 $^{+15.8}_{-12.0}$	35.0 $^{+11.6}_{-11.4}$	0.34 $^{+0.21}_{-0.25}$	3.16 $^{+1.67}_{-1.43}$	0.54 $^{+0.22}_{-0.21}$	85.4 $^{+15.9}_{-11.4}$	0.80 $^{+0.08}_{-0.14}$	6700	12.1 $^{+0.3}_{-0.4}$
GW190630_185205	58.8 $^{+4.7}_{-4.8}$	24.8 $^{+2.1}_{-2.0}$	35.0 $^{+6.9}_{-5.7}$	23.6 $^{+5.2}_{-5.1}$	0.10 $^{+0.12}_{-0.13}$	0.93 $^{+0.56}_{-0.40}$	0.19 $^{+0.10}_{-0.07}$	56.1 $^{+4.5}_{-4.6}$	0.70 $^{+0.06}_{-0.07}$	1300	15.6 $^{+0.2}_{-0.3}$
GW190701_203306	94.1 $^{+11.6}_{-9.3}$	40.2 $^{+5.2}_{-4.7}$	53.6 $^{+11.7}_{-7.8}$	40.8 $^{+8.3}_{-11.5}$	-0.06 $^{+0.23}_{-0.28}$	2.14 $^{+0.79}_{-0.73}$	0.38 $^{+0.12}_{-0.12}$	90.0 $^{+10.8}_{-8.6}$	0.67 $^{+0.09}_{-0.12}$	45	11.3 $^{+0.2}_{-0.4}$
GW190706_222641	101.0 $^{+17.9}_{-13.5}$	42.0 $^{+8.4}_{-6.2}$	64.0 $^{+15.2}_{-15.2}$	38.5 $^{+12.5}_{-12.4}$	0.32 $^{+0.25}_{-0.30}$	5.07 $^{+2.57}_{-2.11}$	0.79 $^{+0.31}_{-0.28}$	96.3 $^{+16.7}_{-13.2}$	0.80 $^{+0.08}_{-0.17}$	610	12.6 $^{+0.2}_{-0.4}$
GW190707_093326	20.0 $^{+1.9}_{-1.3}$	8.5 $^{+0.6}_{-0.4}$	11.5 $^{+3.3}_{-1.7}$	8.4 $^{+1.4}_{-1.6}$	-0.05 $^{+0.10}_{-0.08}$	0.80 $^{+0.37}_{-0.38}$	0.16 $^{+0.07}_{-0.07}$	19.2 $^{+1.9}_{-1.3}$	0.66 $^{+0.03}_{-0.04}$	1300	13.3 $^{+0.2}_{-0.4}$
GW190708_232457	30.8 $^{+2.5}_{-1.8}$	13.1 $^{+0.9}_{-0.6}$	17.5 $^{+4.7}_{-2.3}$	13.1 $^{+2.0}_{-2.7}$	0.02 $^{+0.10}_{-0.08}$	0.90 $^{+0.33}_{-0.40}$	0.18 $^{+0.06}_{-0.07}$	29.4 $^{+2.5}_{-1.7}$	0.69 $^{+0.04}_{-0.04}$	14000	13.1 $^{+0.2}_{-0.3}$
GW190719_215514	55.8 $^{+16.3}_{-10.0}$	22.7 $^{+5.9}_{-3.7}$	35.2 $^{+16.9}_{-9.9}$	20.2 $^{+8.1}_{-6.5}$	0.35 $^{+0.28}_{-0.32}$	4.61 $^{+2.84}_{-2.17}$	0.73 $^{+0.35}_{-0.30}$	52.9 $^{+15.6}_{-9.5}$	0.80 $^{+0.10}_{-0.16}$	2300	8.3 $^{+0.3}_{-1.0}$
GW190720_000836	21.3 $^{+4.3}_{-2.3}$	8.9 $^{+0.5}_{-0.8}$	13.3 $^{+6.6}_{-3.0}$	7.8 $^{+2.2}_{-2.2}$	0.18 $^{+0.14}_{-0.12}$	0.81 $^{+0.71}_{-0.33}$	0.16 $^{+0.12}_{-0.06}$	20.3 $^{+4.5}_{-2.3}$	0.72 $^{+0.06}_{-0.05}$	510	11.0 $^{+0.3}_{-0.8}$
GW190727_060333	65.8 $^{+10.9}_{-7.4}$	28.1 $^{+4.9}_{-3.4}$	37.2 $^{+9.4}_{-5.9}$	28.8 $^{+6.6}_{-7.9}$	0.12 $^{+0.26}_{-0.25}$	3.60 $^{+1.56}_{-1.51}$	0.60 $^{+0.20}_{-0.22}$	62.6 $^{+10.2}_{-7.0}$	0.73 $^{+0.10}_{-0.10}$	860	11.9 $^{+0.3}_{-0.5}$
GW190728_064510	20.5 $^{+4.5}_{-3.3}$	8.6 $^{+0.5}_{-0.3}$	12.2 $^{+7.1}_{-2.2}$	8.1 $^{+1.7}_{-2.6}$	0.12 $^{+0.19}_{-0.07}$	0.89 $^{+0.25}_{-0.37}$	0.18 $^{+0.05}_{-0.07}$	19.5 $^{+4.6}_{-1.3}$	0.71 $^{+0.04}_{-0.04}$	410	13.0 $^{+0.2}_{-0.4}$
GW190731_140936	67.1 $^{+15.3}_{-10.2}$	28.4 $^{+6.8}_{-4.5}$	39.3 $^{+11.8}_{-8.2}$	28.0 $^{+8.9}_{-8.4}$	0.08 $^{+0.24}_{-0.24}$	3.97 $^{+2.56}_{-2.07}$	0.65 $^{+0.32}_{-0.30}$	63.9 $^{+14.4}_{-9.8}$	0.71 $^{+0.10}_{-0.12}$	3000	8.6 $^{+0.2}_{-0.5}$
GW190803_022701	62.7 $^{+11.8}_{-8.4}$	26.7 $^{+5.2}_{-3.8}$	36.1 $^{+10.2}_{-6.7}$	26.7 $^{+7.1}_{-7.6}$	-0.01 $^{+0.25}_{-0.26}$	3.69 $^{+2.04}_{-1.69}$	0.61 $^{+0.26}_{-0.24}$	59.9 $^{+11.2}_{-7.9}$	0.69 $^{+0.10}_{-0.11}$	1500	8.6 $^{+0.3}_{-0.5}$
GW190814	25.8 $^{+1.0}_{-0.9}$	6.09 $^{+0.06}_{-0.06}$	23.2 $^{+1.1}_{-1.0}$	2.59 $^{+0.08}_{-0.09}$	0.00 $^{+0.06}_{-0.06}$	0.24 $^{+0.04}_{-0.05}$	0.05 $^{+0.009}_{-0.010}$	25.6 $^{+1.0}_{-0.9}$	0.28 $^{+0.02}_{-0.02}$	19	24.9 $^{+0.1}_{-0.2}$
GW190828_063405	57.5 $^{+7.5}_{-4.4}$	24.8 $^{+3.3}_{-2.0}$	31.8 $^{+5.8}_{-3.9}$	25.9 $^{+4.4}_{-4.6}$	0.19 $^{+0.15}_{-0.16}$	2.29 $^{+0.63}_{-0.95}$	0.40 $^{+0.09}_{-0.15}$	54.5 $^{+6.9}_{-4.0}$	0.76 $^{+0.06}_{-0.07}$	520	16.2 $^{+0.2}_{-0.3}$
GW190828_065509	34.1 $^{+5.5}_{-4.5}$	13.3 $^{+1.2}_{-0.9}$	23.8 $^{+7.2}_{-7.0}$	10.2 $^{+3.5}_{-2.1}$	0.08 $^{+0.16}_{-0.16}$	1.66 $^{+0.63}_{-0.61}$	0.31 $^{+0.10}_{-0.10}$	32.9 $^{+5.7}_{-4.5}$	0.65 $^{+0.09}_{-0.08}$	640	10.0 $^{+0.3}_{-0.5}$
GW190909_114149	71.2 $^{+54.3}_{-15.0}$	29.5 $^{+17.5}_{-6.3}$	43.2 $^{+50.7}_{-12.2}$	27.6 $^{+13.0}_{-10.9}$	-0.03 $^{+0.44}_{-0.36}$	4.77 $^{+3.70}_{-2.66}$	0.75 $^{+0.45}_{-0.37}$	68.3 $^{+52.5}_{-14.5}$	0.68 $^{+0.16}_{-0.18}$	4200	8.1 $^{+0.4}_{-0.7}$
GW190910_112807	78.7 $^{+9.5}_{-9.0}$	33.9 $^{+4.3}_{-3.9}$	43.5 $^{+7.6}_{-6.2}$	35.1 $^{+6.3}_{-7.0}$	0.02 $^{+0.19}_{-0.18}$	1.57 $^{+1.07}_{-0.64}$	0.29 $^{+0.17}_{-0.11}$	75.0 $^{+8.7}_{-8.5}$	0.70 $^{+0.08}_{-0.07}$	10000	14.1 $^{+0.2}_{-0.3}$
GW190915_235702	59.5 $^{+7.5}_{-6.2}$	25.1 $^{+3.1}_{-2.6}$	34.9 $^{+9.5}_{-6.2}$	24.4 $^{+5.5}_{-6.0}$	0.03 $^{+0.19}_{-0.24}$	1.70 $^{+0.71}_{-0.64}$	0.32 $^{+0.11}_{-0.11}$	56.8 $^{+7.1}_{-5.8}$	0.71 $^{+0.09}_{-0.11}$	380	13.6 $^{+0.2}_{-0.3}$
GW190924_021846	13.9 $^{+5.1}_{-0.9}$	5.8<math									

**В спектре масс тех черных дыр, которые могут возникать в результате звездного коллапса, имеется довольно широкая щель.
Нижняя граница этой щели лежит в диапазоне от 40 до 65 солнечных масс,
а верхняя приблизительно равна 120 солнечным массам.**

PHYSICAL REVIEW LETTERS 125, 101102 (2020)

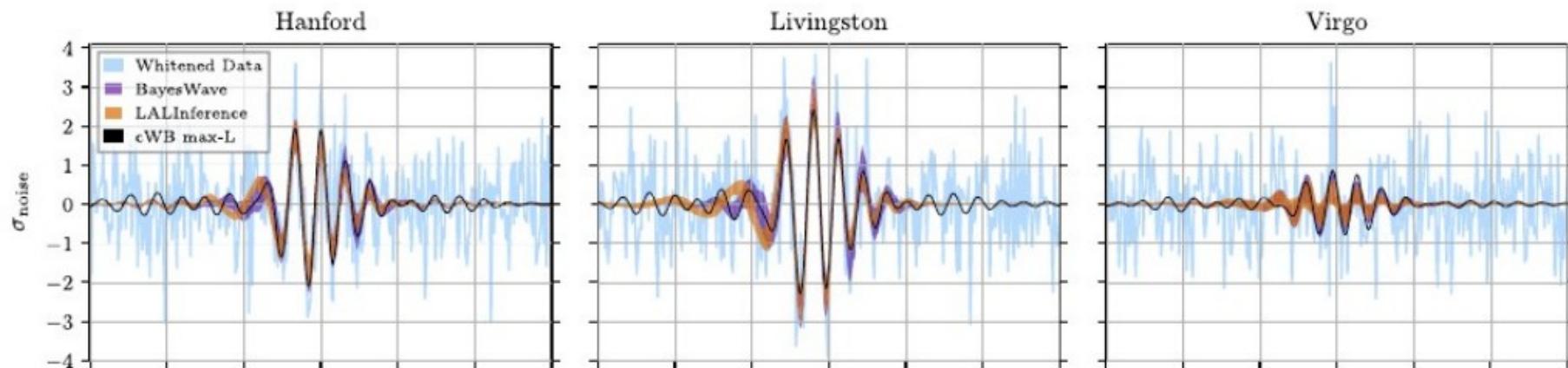
Editors' Suggestion

Featured in Physics

GW190521: A Binary Black Hole Merger with a Total Mass of $150 M_{\odot}$

R. Abbott *et al.*^{*}

(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)



$85^{+21}_{-14} M_{\odot}$ and $66^{+17}_{-18} M_{\odot}$ (90% credible intervals)

$$\chi_{eff} \sim 0$$

Такие черные дыры не могут естественным путём образоваться в результате звездной эволюции! \Rightarrow

Большинство найденных черных дыр – реликтовые.

Предполагает ли модель Λ CDM возможность образования реликтовых черных дыр? В общем, это пока непонятно.

arXiv:2011.14385

PRIMORDIAL BLACK HOLES AND MODIFICATION OF ZELDOVICH-NOVIKOV MECHANISM *

© 2021. A. D. Dolgov^{1,†} and K. A. Postnov^{2,‡}

¹*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

²*Sternberg Astronomical Institute, Moscow, Russia*

Received: ; Revised: ; Accepted: .

A review of the recent astronomical observations is presented and it is argued that the data strongly indicate that practically all observed black holes are primordial. A modified mechanism of the primordial black hole formation is described. The log-normal mass spectrum predicted by this mechanism is strongly confirmed by the LIGO data on gravitational wave registration.

Эволюция в Мультивёрсе: немного философии

Парадокс Циолковского в Мультивесе

В вечном и бесконечном Мультиверсе наивысший возможный уровень эволюции должен быть достигнут (бесконечно) много раз, независимо от того, насколько велика или мала вероятность его достижения.

В Мультиверсе «совершенный разум» присутствует актуально.

КАКОВ НАИВЫСШИЙ ВОЗМОЖНЫЙ УРОВЕНЬ ЭВОЛЮЦИИ?

Альтернатива:

Либо уровень эволюции, допускающий влияние из одной локальной вселенной на другие локальные вселенные **недостижим** во всем бесконечном количестве реализаций локальных вселенных Мультиверса (**маловероятно?**), тогда для нас присутствие «совершенного разума» ничего не значит.

Либо этот уровень достижим, тогда наша локальная Вселенная может иметь следы «искусственной» настройки с очень большой вероятностью

Имеются три объяснения тонкой настройки констант, которые апеллируют к Мультиверсу

1. Слабый антропный принцип (случайный выбор на Мультиверсе).
2. Структура Мультиверса самосогласована с возможностью существования в нем высокоорганизованных форм материи.
3. Комбинация первого и второго

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

Изотропное условие энергодоминантности и его нарушение

В.А. Рубаков

Дан краткий обзор моделей скалярных полей с лагранжианами, содержащими вторые производные, но приводящими к уравнениям поля второго порядка. Некоторые из таких моделей имеют решения, нарушающие изотропное (светоподобное) условие энергодоминантности, и при этом не имеющие никаких явных противоречий. Приведены примеры использования этих моделей для построения космологических сценариев, а также в контексте создания вселенной в лаборатории.

PACS numbers: 04.20.Dw, 04.62.+v, 98.80.Bp

DOI: 10.3367/UFNr.0184.201402b.0137

Содержание

1. Введение (137).
 2. Нарушение условия NEC и неустойчивости (139).
 - 2.1. Тахоны, градиентные неустойчивости, духи.
 - 2.2. Скалярные теории с лагранжианами, содержащими производные только первого порядка.
 3. Лагранжианы с производными второго порядка (142).
 4. Примеры нарушения условия NEC (143).
 - 4.1. Катящееся фоновое решение.
 - 4.2. Сценарий генезиса.
 - 4.3. Космология с отскоком.
 5. Заключение (149).
- Приложение А (149).
Приложение В (150).
Приложение С (151).
Список литературы (151).

1. Введение

Среди разнообразных условий энергодоминантности (или энергетических условий) особую роль играет изотропное условие (the Null Energy Condition, NEC). Это условие означает, что тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ удовлетворяет соотношению¹

$$T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu > 0 \quad (1)$$

для любого изотропного (светоподобного) вектора n^μ , т.е. такого вектора, что $g_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$. Есть две главные причины, по которым условие NEC особенно интересно.

¹ Случай космологической постоянной $T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$ — особый. В этом случае $T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 0$. В дальнейшем мы не исключаем возможности того, что космологическая постоянная отлична от нуля, но считаем, что в системе присутствует и какая-то другая материя. Всё наше обсуждение при этом остаётся в силе.

В.А. Рубаков. Институт ядерных исследований РАН,
просп. 60-летия Октября 7а, 117312 Москва, Российская Федерация
E-mail: rubakov@ms2.inr.ac.ru
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
физический факультет,
Ленинские горы, 119991 Москва, Российская Федерация
Статья поступила 15 января 2014 г.

© В.А. Рубаков 2014

4.3. Космология с отскоком

Теории галилеона могут быть использованы и для построения космологических моделей с отскоком [66, 110–114]. Перед тем как обсуждать эту возможность, сделаем одно отступление. Сжимающаяся Вселенная легко может стать сильно неоднородной и анизотропной из-за явления Белинского–Лифшица–Халатникова [115–119]. Это представляет собой проблему с точки зрения самосогласованности всего сценария с отскоком. Для решения этой проблемы можно предположить, что доминирующая материя имеет сверхжёсткое уравнение состояния $p > \rho$ [120]. Именно это предположение делается в классе моделей с экипирозисом [83, 84]. Мы обсуждаем этот вопрос несколько подробнее в приложении В. Отметим, что для материи с уравнением состояния $p = wp$, $w = \text{const}$, уравнение (5) даёт $\rho \propto a^{-3(1+w)}$, а из уравнения (3a) с $k = 0$ получается закон эволюции масштабного фактора

$$a(t) \propto |t|^\alpha, \quad t < 0,$$

где

$$\alpha = \frac{2}{3(1+w)}.$$

Для сверхжёсткого уравнения состояния выполняется поэтому

$$\alpha < \frac{1}{3}. \quad (49)$$

Пример сверхжёсткой материи даёт скалярное поле с отрицательным экспоненциальным потенциалом:

$$L_\phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad V(\phi) = -V_0 e^{\phi/M}, \quad (50)$$

где V_0 и M — положительные параметры. Уравнение для однородного поля $\phi(t)$ и уравнение Фридмана (3a) имеют следующее решение

$$a(t) = |t|^\alpha, \quad \phi(t) = \text{const} - 2M \ln |t|, \quad (51)$$

$$V[\phi(t)] = -\frac{2M^2(1-3\alpha)}{t^2}, \quad t < 0,$$

где

$$\alpha = 16\pi \frac{M^2}{M_{\text{Pl}}^2}. \quad (52)$$

Это решение — атTRACTOR в случае коллапса. В соответствии с (49) и (52) эффективное уравнение состояния действительно является сверхжёстким, $w \gg 1$ при $M \ll M_{\text{Pl}}$. Отметим, что плотность энергии положительна и растёт при коллапсе,

$$\rho = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) = \frac{6M^2\alpha}{t^2}.$$

Это свойство оставляет возможность того, что потенциал $V(\phi)$ становится положительным при больших ϕ , и поле "выныривает" из отрицательной потенциальной ямы на некоторой поздней стадии.

Следует отметить, что при $M \ll M_{\text{Pl}}$ это решение всегда находится в режиме слабой гравитации, аналогичном режиму, обсуждавшемуся в разделе 4.2. В пределе слабой гравитации можно пренебречь гравитационными эффектами в уравнении скалярного поля и получить

3*

решение в пространстве Минковского:

$$\phi(t) = M \ln \left(\frac{2M^2}{t^2 V_0} \right), \quad V(t) = -\frac{2M^2}{t^2}. \quad (53)$$

Плотность энергии равна нулю в этом пределе, а давление равно

$$p = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - V = \frac{4M^2}{t^2}. \quad (54)$$

Приближение слабой гравитации работает во все времена при $M \ll M_{\text{Pl}}$.

Хотя для построения моделей, в которых эпоха экипирозиса заканчивается отскоком, в принципе достаточно ограничиться теориями всего с одним скалярным полем [112, 114], гораздо проще [113] расширить модель (50), добавив новое поле галилеона с лагранжианом (28). Тогда полный лагранжиан материи будет иметь вид

$$L = L_\pi + L_\phi. \quad (55)$$

В режиме слабой гравитации поля ϕ и π не взаимодействуют между собой, галилеон катится согласно (34), а поле $\phi(t)$ даёт выражением (53). Плотность энергии равна нулю, а давление представляет собой сумму выражений (45) и (54):

$$p = \frac{4M^2}{t^2} - \frac{P}{(t_* - t)^4}. \quad (56)$$

Параметр Хаббла вновь находим из уравнения (4):

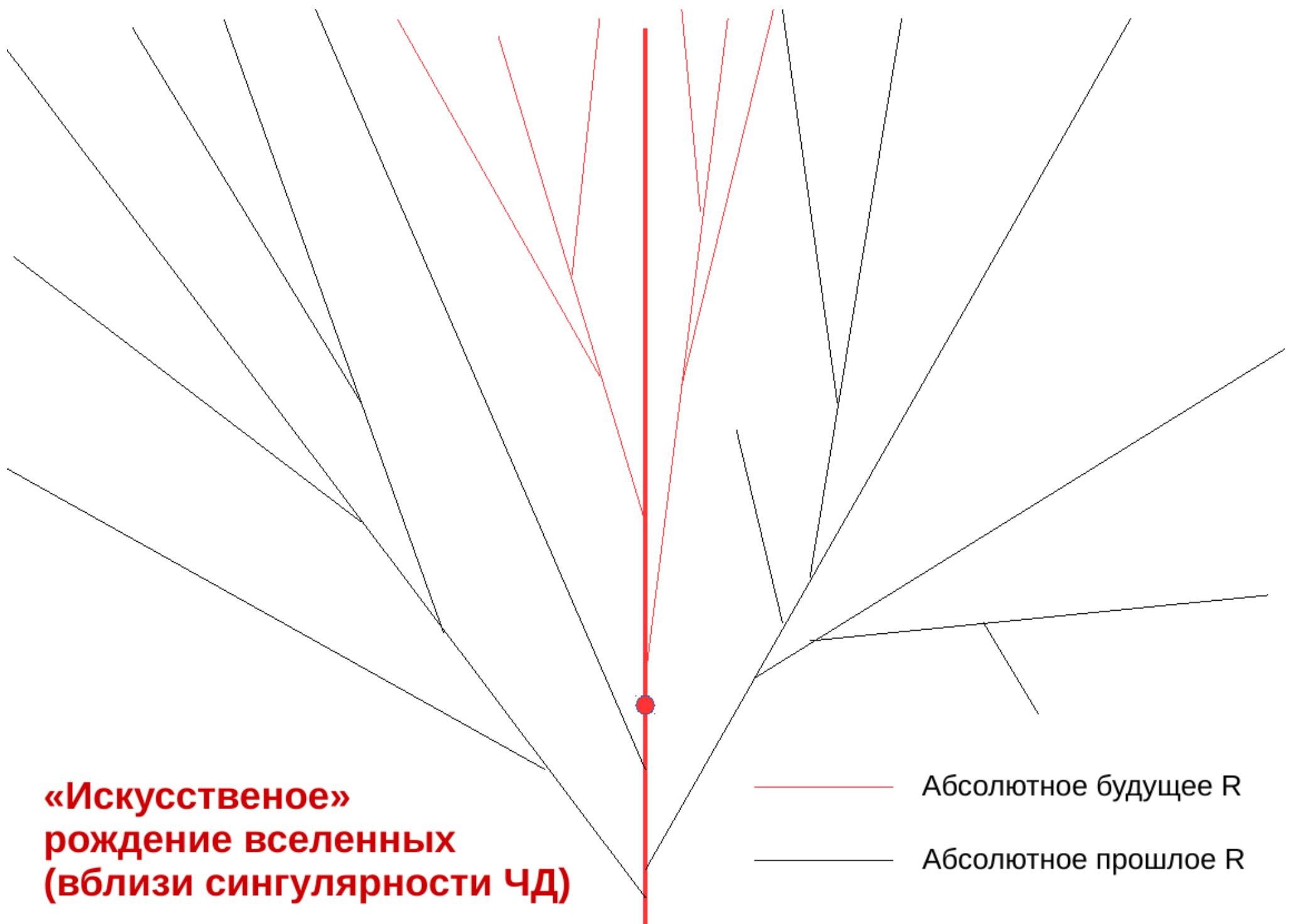
$$H = -\frac{16\pi M^2}{M_{\text{Pl}}^2 |t|} + \frac{4\pi P}{3M_{\text{Pl}}^2 (t_* - t)^3}. \quad (57)$$

В ранние времена поле ϕ доминирует, и Вселенная сжимается ($H < 0$), затем галилеон начинает преобладать, по крайней мере в случае $t_* < 0$, сжатие прекращается ($H = 0$, отскок), начинается эпоха расширения ($H > 0$), которая вполне аналогична стадии генезиса. Нетрудно видеть, что отскок происходит в режиме слабой гравитации $H \ll \dot{\pi}$, если выполнено мягкое неравенство $|t_*| \gg P^{1/2} M^2 / M_{\text{Pl}}^2$, $t_* < 0$ (случай $t_* > 0$ рассмотрен в работе [113]; результат состоит в том, что отскок происходит всегда, но не обязательно в режиме слабой гравитации).

Модель можно сделать более реалистичной путём изменения потенциала $V(\phi)$ при больших ϕ и добавления потенциала для галилеона, чтобы обеспечить занятие космологической постоянной на поздних стадиях. В зависимости от выбора параметров система либо переходит в режим инфляции, либо нет [113]. Аспекты, обсуждавшиеся в разделе 4.2, присутствуют и в рассматриваемой модели.

4.4. Вселенная в пробирке

Наш последний пример — попытка построить модель создания вселенной в лаборатории [70]. Идея состоит в том, чтобы построить следующее начальное условие в теории галилеонного типа: 1) внутри некоторой большой сферы поле π близко к однородному и ведёт себя так же, как на начальной стадии сценария генезиса, 2) вне этой сферы это поле стремится к константному решению, а пространство-время асимптотически плоское. Для таких начальных данных плотность энергии и давление везде малы, всё пространство-время почти плоское, так что требуемая начальная конфигурация может быть приготовлена "в лаборатории". При последующей эволюции

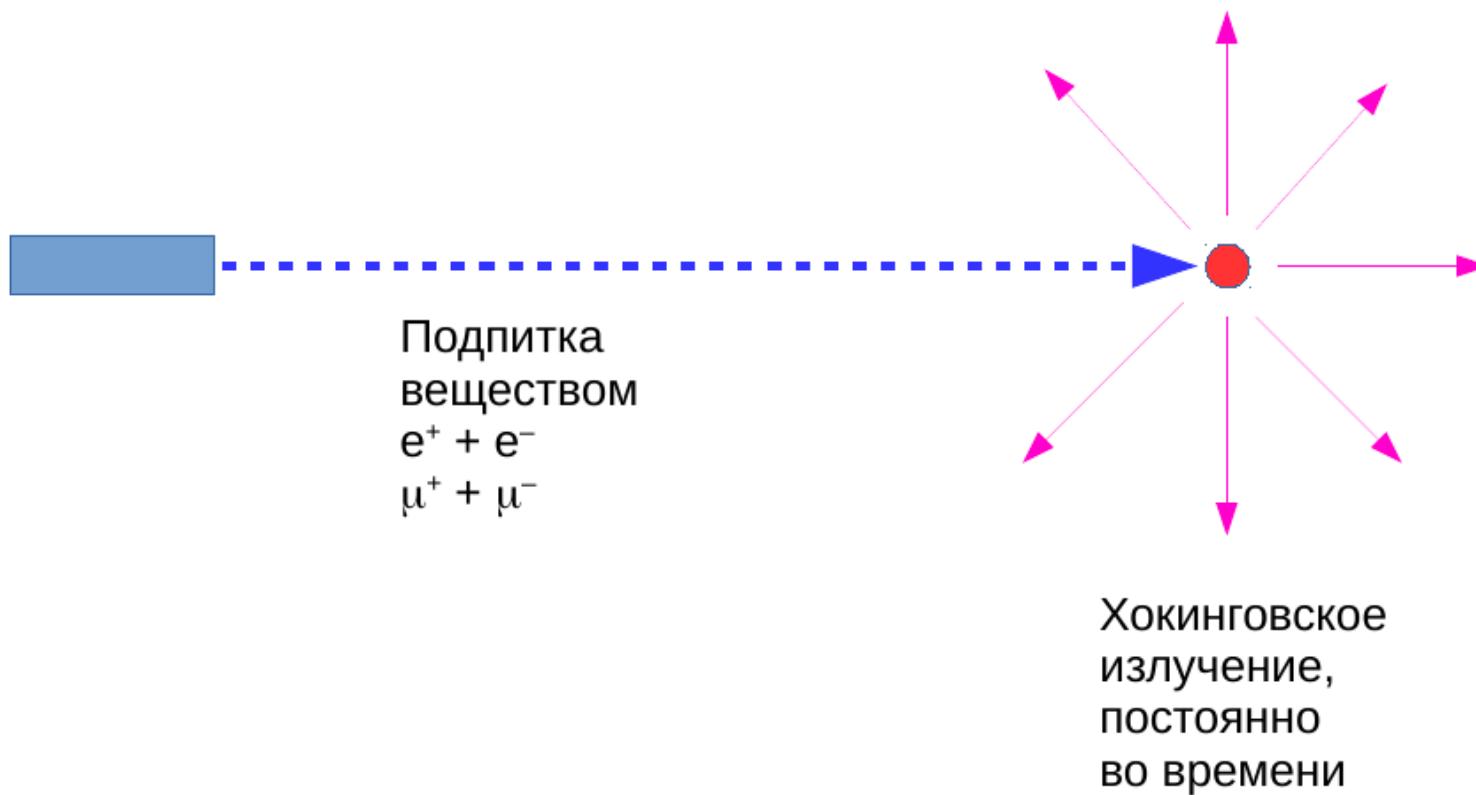


Луис Крейн. Искусственные черные дыры (ам = 10⁻¹⁶см)

R (ам)	M (Мт)	kT (GeV)	$f(T)$	P (PW)	P/c^2 (г/сек)	L (yrs)
0.16	0.108	98.1	13.3	5519	61400	$\lesssim 0.04$
0.3	0.202	52.3	13.0	1527	17000	$\lesssim 0.12$
0.6	0.404	26.2	12.5	367	4090	1
0.9	0.606	17.4	12.2	160	1780	3.5
1.0	0.673	15.7	12.1	129	1430	5
1.5	1.01	10.5	11.9	56.2	626	16 – 17
2.0	1.35	7.85	11.8	31.3	348	39 – 41
2.5	1.68	6.28	11.7	19.8	221	75 – 80
2.6	1.75	6.04	11.7	18.3	204	85 – 91
2.7	1.82	5.82	11.7	16.9	189	95 – 102
2.8	1.89	5.61	11.6	15.7	175	106 – 114
2.9	1.95	5.41	11.6	14.6	163	118 – 127
3.0	2.02	5.23	11.6	13.7	152	130 – 140
5.8	3.91	2.71	11.1	3.50	38.9	941 – 1060
5.9	3.97	2.66	11.1	3.37	37.5	991 – 1117
6.0	4.04	2.62	11.1	3.26	36.2	1042 – 1177
6.9	4.65	2.28	10.9	2.43	27.1	1585 – 1814
7.0	4.71	2.24	10.9	2.36	26.2	1655 – 1897
10.0	6.73	1.57	10.5	1.11	12.3	4824 – 5763

Зачем нужны искусственные черные дыры?

Сверхэффективный источник энергии:
100% переработки массы в энергию



Как создать мегатонную ЧД?

Гамма-лазеры с волной $\sim 10^{-15}$ см, $E \sim 100$ ГэВ
(самофокусировка)

Пример

$$M_{\text{BH}} = 10^6 \text{ т}$$

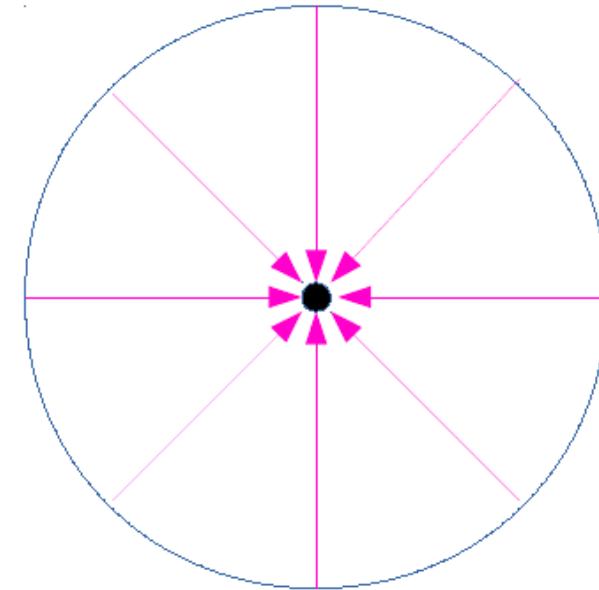
Расстояние от поверхности Солнца = 2 млн. км.

Размер солнечной панели = 1000 км \times 1000 км

Время сбора энергии = 247 дней

Масса установки (оценка Л.Крейна):

$$10^{10} \text{ т (небольшой астероид, } \sim 1.5 \text{ км)}$$



+Возможность тонкой настройки:

- Заданный момент вращения,
- Квазинормальные моды колебаний,
- Заряд

Как искать следы работы «совершенного разума»?

За тонкую настройку констант может отвечать не только слабый антропный принцип

Физика: странные совпадения, странные соотношения.

Математика (сценарий Сагана): странное поведение математических структур