Лекция 12

Динамика CDM и барион-фотонной среды до рекомбинации. Анизотропия реликтового излучения. Эффекты распространения фотонов и наблюдаемые возмущения температуры CMB

Динамика CDM и барион-фотонной среды до рекомбинации.

Важна в двух отношениях:
- Определяет структуру анизотропии реликтового микроволнового фона (Сахаровские осцилляции)
- Формирует начальные условия для последующего формирования структур – галактик и т.д.

Вплоть до рекомбинации барион-фотонная компонента среды $B\gamma$ остается релятивистсткой, в том смысле, что

$$\frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(\eta_{eq}) \cong 0.30 \qquad (12.1)$$

$$\frac{\rho_B}{\rho_\gamma}(\eta_r) \cong 0.85 \qquad (12.2)$$

$B\gamma$ рассматривается как единая среда.

Адиабатические моды, входящие под горизонт на РД-стадии

Уже известно: Релятивистская компонента на РД-стадии осциллирует с фиксированой фазой (10.155)

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)}\frac{1}{(u_s k\eta)^2}\left[\cos(u_s k\eta) - \frac{\sin(u_s k\eta)}{u_s k\eta}\right] \qquad (12.3)$$

$$\Phi_{(i)} = -\frac{2}{3}\zeta = -\frac{2}{3}\mathcal{R} \qquad (12.4)$$

Осцилляции $B\gamma$ продолжаются до рекомбинации.

- Существенно новое явление: Потенциал главной УР оцсиллирующей компоненты $\Phi(\eta)$ индуцирует возмущения темной материи, которые уже на РД-стадии логарифмически растут во времени.

- Релятивистская $B\gamma$-материя осциллирует до самой рекомбинации, и остаточных возмущений $\sqrt{R} \sim 5\cdot 10^{-5}$ *не хватило бы для перехода в нелинейный режим и формирования структур.*

- После рекомбинации барионная материя сваливается в потенциальные ямы, сформированные CDM еще до рекомбинации (и даже до η_{eq}), и только благодаря этому возникают структуры.

- Изучаем возмущения CDM, индуцированные потенциалом (10.155) (или (12.3))

Возмущения темной материи на РД-стадии

Потенциалы считаем заданными уравнениями (10.155) (или (12.3)).

Покомпонентные уравнения ковариантного сохранения ЭИ (11.22), (11.23):

$$\delta_\lambda'+3\frac{a'}{a}(u_{s,\lambda}^2-w_\lambda)\delta_\lambda-(1+w_\lambda)k^2v_\lambda = 3(1+w_\lambda)\Phi' \quad (12.5)$$

$$[(1+w_\lambda)v_\lambda]'+\frac{a'}{a}(1-3w_\lambda)(1+w_\lambda)v_\lambda+u_{s,\lambda}^2\delta_\lambda = -(1+w_\lambda)\Phi \quad (12.6)$$

$\lambda = CDM \Rightarrow w_\lambda = u_{s,\lambda}^2 = 0 \Rightarrow$

$$\delta_{CDM}' - k^2 v_{CDM} = 3\Phi' \quad (12.7)$$

$$v_{CDM}' + \frac{1}{\eta}v_{CDM} = -\Phi \quad (12.8)$$

Из (12.8), методом вариации постоянных:

$$v_{CDM}(\eta) = -\frac{1}{\eta}\int_{\eta_0}^{\eta}\eta\Phi(\eta)\,d\eta \quad (12.9)$$

η_0 – неопределнная постоянная.
Решение расходится в нуле при всех $\eta_0 \neq 0 \Rightarrow \eta_0 = 0$.
Следовательно конечное решение есть

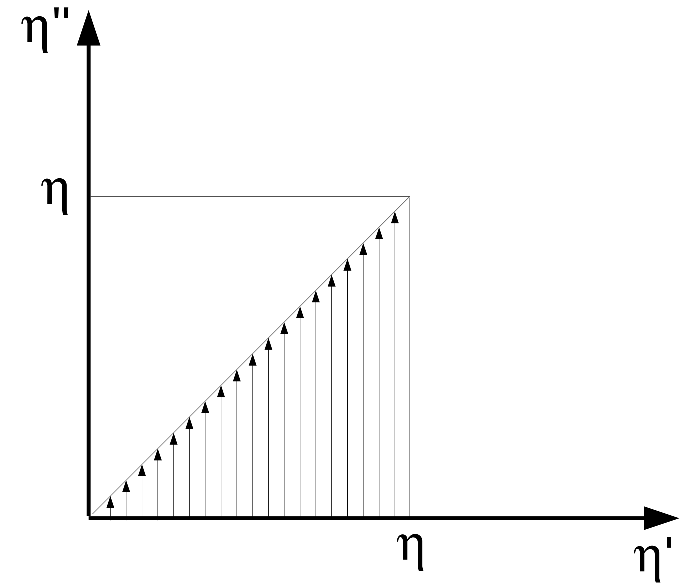
$$v_{CDM}(\eta) = -\frac{1}{\eta}\int_0^{\eta}\eta\Phi(\eta)\,d\eta \quad (12.10)$$

Из (12.7) сразу получается:

$$\delta_{CDM}(\eta) = 3\Phi(\eta) + C - k^2\int_0^{\eta}\frac{d\eta'}{\eta'}\int_0^{\eta'}\eta''\Phi(\eta'')d\eta'' \quad (12.11)$$

$$\eta = 0 \Rightarrow C = -3\Phi_{(i)} + \delta_{CDM(i)} \Rightarrow \quad (12.12)$$

$$\delta_{CDM}(\eta) = \\ = \delta_{CDM(i)}+3[\Phi(\eta)-\Phi_{(i)}]-k^2\int_0^{\eta}\frac{d\eta'}{\eta'}\int_0^{\eta'}\eta''\Phi(\eta'')d\eta'' \quad (12.13)$$



$$\int_0^{\eta}d\eta'\int_0^{\eta'}d\eta''\frac{\eta''}{\eta'}\Phi(\eta'') = \int_0^{\eta}d\eta''\int_{\eta''}^{\eta}d\eta'\frac{\eta''}{\eta'}\Phi(\eta'') = \\ \int_0^{\eta}d\eta''\,\eta''\Phi(\eta'')\int_{\eta''}^{\eta}\frac{d\eta'}{\eta'} = \int_0^{\eta}d\eta''\,\eta''\Phi(\eta'')\ln\left(\frac{\eta}{\eta''}\right) \Rightarrow \quad (12.14)$$

$$\delta_{CDM}(\eta) =$$
$$= \delta_{CDM(i)}+3[\Phi(\eta)-\Phi_{(i)}]-k^2\int_0^\eta d\eta''\,\eta''\Phi(\eta'')\ln\left(\frac{\eta}{\eta''}\right) \quad (12.15)$$

Интеграл сходится и считается, для мод глубоко под акустическим горизонтом ($u_s k\eta \gg 1$) получается ★:

$$\delta_{CDM}(\eta) = \delta_{CDM(i)} - 9\Phi_{(i)}\left[\ln(u_s k\eta) + \mathbf{C} - \frac{2}{3}\right] \quad (12.16)$$

$\mathbf{C} = 0.577\ldots$ – постоянная Эйлера.

Из (11.49),(11.51) следует $\delta_{CDM(i)} = -\frac{3}{2}\Phi(i) \Rightarrow$

$$\boxed{\delta_{CDM}(\eta) = -9\Phi_{(i)}\left[\ln\left(\frac{k\eta}{\sqrt{3}}\right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2}\right]} \quad (12.17)$$

Есть логарифмический рост возмущения плотности CDM, скорость которого определяется амплитудами потенциалов $9\Phi_{(i)}$

Важны потенциалы CDM, в которые потом сваливается обычное вещество:
Из (11.14) (00 компонента Лин.Ур.Эйнштейна)

$$k^2\Phi_{CDM} + 3\frac{a'}{a}\Phi'_{CDM} + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi_{CDM} = -4\pi G a^2 \delta\rho_{CDM} \quad (12.18)$$

В пределе $u_s k\eta \gg 1$ остается только член $k^2\Phi \Rightarrow$

$$\boxed{\Phi_{CDM}(\eta) = -4\pi G\frac{a^2(\eta)}{k^2}\rho_{CDM}(\eta)\delta_{CDM}} \quad (12.19)$$

– падает немного медленнее, чем $1/a(\eta)$.

На РД-стадии $\Phi_{CDM}(\eta)$ мал по сравнению с релятивистским $\Phi(\eta)$ из-за малости ρ_{CDM} по сравнению с ρ_{tot}.
Но вклад CDM становится главным при переходе на МД-стадию.

Возмущения темной материи на МД-стадии

Так как CDM является доминирующей компонентой на МД-стадии после η_{eq}, то заранее ясно, что нужно ожидать роста δ_{CDM} пропорционально $a(\eta)$ на фоне постоянных потенциалов $\Phi_{CDM}(\eta)$, как это предсказывает упрощенная однокомпонентная модель адиабатических возмущений, см. (10.171) и (10.185).

Наивная оценка:

$$\delta_{CDM}(\eta) = \delta_{CDM}(\eta_{eq})\frac{a(\eta)}{a_{eq}} =$$
$$= -9\Phi_{(i)}\frac{a(\eta)}{a_{eq}}\left[\ln\left(\frac{k\eta_{eq}}{\sqrt{3}}\right) + \mathbf{C} - \frac{1}{2}\right] \approx$$
$$\approx -9\Phi_{(i)}\frac{a(\eta)}{a_{eq}}\ln\left(0.6k\eta_{eq}\right) \quad (12.20)$$

Более точная оценка [Горбунов, Рубаков, Т.2, 6.2.1]:

$$\delta_{CDM}(\eta) \approx -\frac{27}{2}\frac{a(\eta)}{a_{eq}}\Phi_{(i)}\ln(0.2k\eta_{eq}) \tag{12.21}$$

Решения не совсем сшиваются – есть переходная область в районе η_{eq} («ступенька», фактор 3/2).

Из (12.19):

$$\Phi_{CDM}(\eta) = \frac{27}{2}\Phi_{(i)}4\pi G\rho_{CDM}\frac{a^2}{k^2}\frac{a}{a_{eq}}\ln(0.2k\eta_{eq}) =$$

$$= \Bigg\backslash \rho_{CDM} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3\rho^0_{CDM} = \left(\frac{a_0}{a}\right)^3\Omega_{CDM}\frac{3}{8\pi G}H_0^2 \Bigg\backslash =$$

$$= \frac{81}{4}\Phi_{(i)}\frac{a_0^2}{k^2}\Omega_{CDM}H_0^2(1+z_{eq})\ln(0.2k\eta_{eq}) \tag{12.22}$$

– не зависит от времени.

<u>Возмущения барион-фотонной компоненты $B\gamma$ на МД-стадии до рекомбинации</u>

• Продолжаются осцилляции, но на фоне растущего возмущения CDM-компоненты.

• Единство $B\gamma$ (приближение тесной связи):

$$v_\gamma \approx v_B \equiv v_{B\gamma} \tag{12.23}$$

• Для адиабатической моды B_γ:

$$\delta_B = 3\frac{\delta T}{T},\ \delta_\gamma = 4\frac{\delta T}{T} \Rightarrow \delta_B = \frac{3}{4}\delta_\gamma \tag{12.24}$$

• Из-за того, что барионы нерелятивистсткие, перенос энергии от фотонов к барионам слабый, поэтому ковариантное сохранение для барионов и фотонов приблизительно выполняется отдельно.

• $B\gamma$ – субдоминантная компонента (CDM - доминантная).

С использованием потенциала (12.22) (или какого-то похожего, более точного), уравнений ковариантного сохранения и Эйнштейна для возмущений, ищется δ_γ.

Можно считать численно, можно приближенно аналитически (метод типа ВКБ).

<u>Результат (ВКБ):</u> [Горбунов, Рубаков, Т.2, 6.2.2]

$$R_B \equiv \frac{\rho_B(\eta)}{\rho_\gamma(\eta)} \propto a(\eta) \propto \eta^2 \tag{12.25}$$

$$R_B(\eta_{eq}) \approx 0.3; \;\; R_B(\eta_r) \approx 0.6 \tag{12.26}$$

$$u_s^2(\eta) = \frac{\delta p}{\delta \rho} = \frac{\delta\rho_\gamma/3}{\delta\rho_\gamma + \delta\rho_B} = \frac{1}{3[1+R_B(\eta)]} \tag{12.27}$$

$u_s \neq 1/\sqrt{3}$, но меняется не очень сильно.

$$\delta_\gamma(\eta) = \Phi_i \times$$
$$\times \left[-324 \cdot (1+R_B)\, I(\Omega_M)^2 \, \frac{\Omega_{CDM}}{\Omega_M} (1+z_{eq}) \, \frac{\ln(0.2k\eta_{eq})}{(k\eta_0)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{6}{(1+R_B)^{1/4}} \, \cos\left(k \int_0^\eta u_s(\eta')d\eta' \right) \right] \tag{12.28}$$

где (см. (9.26))

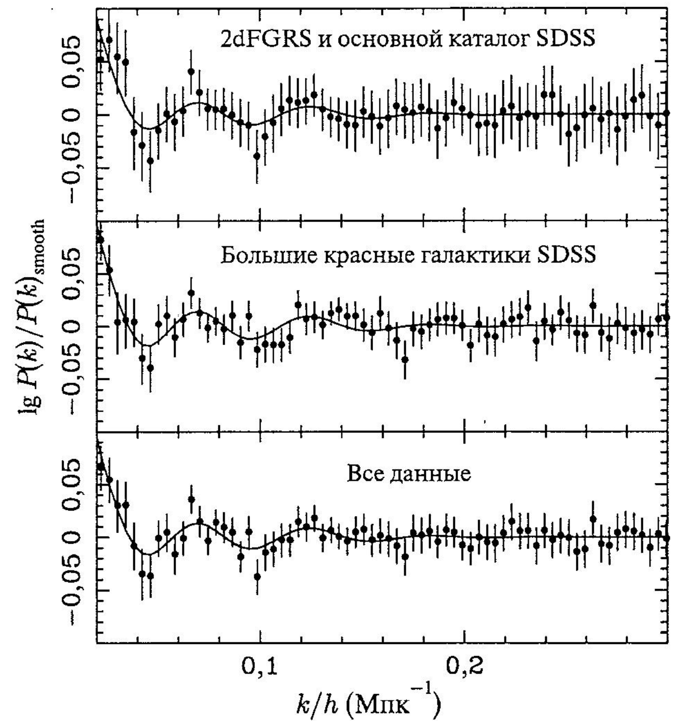
$$I(\Omega_M) = \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}(1+z)^4}} \approx 0.89 \tag{12.29}$$

Для адиабатических мод:

$$\delta_B = \frac{3}{4}\delta_\gamma \tag{12.30}$$

Осцилляции $B\gamma$-материи до момента рекомбинации влияют на
- анизотропию микроволнового фона
- распределение барионной материи – *барионные осцилляции* (BAO – Barion Acoustic Oscillatons)

Корреляционная функция распределения материи (галактики)

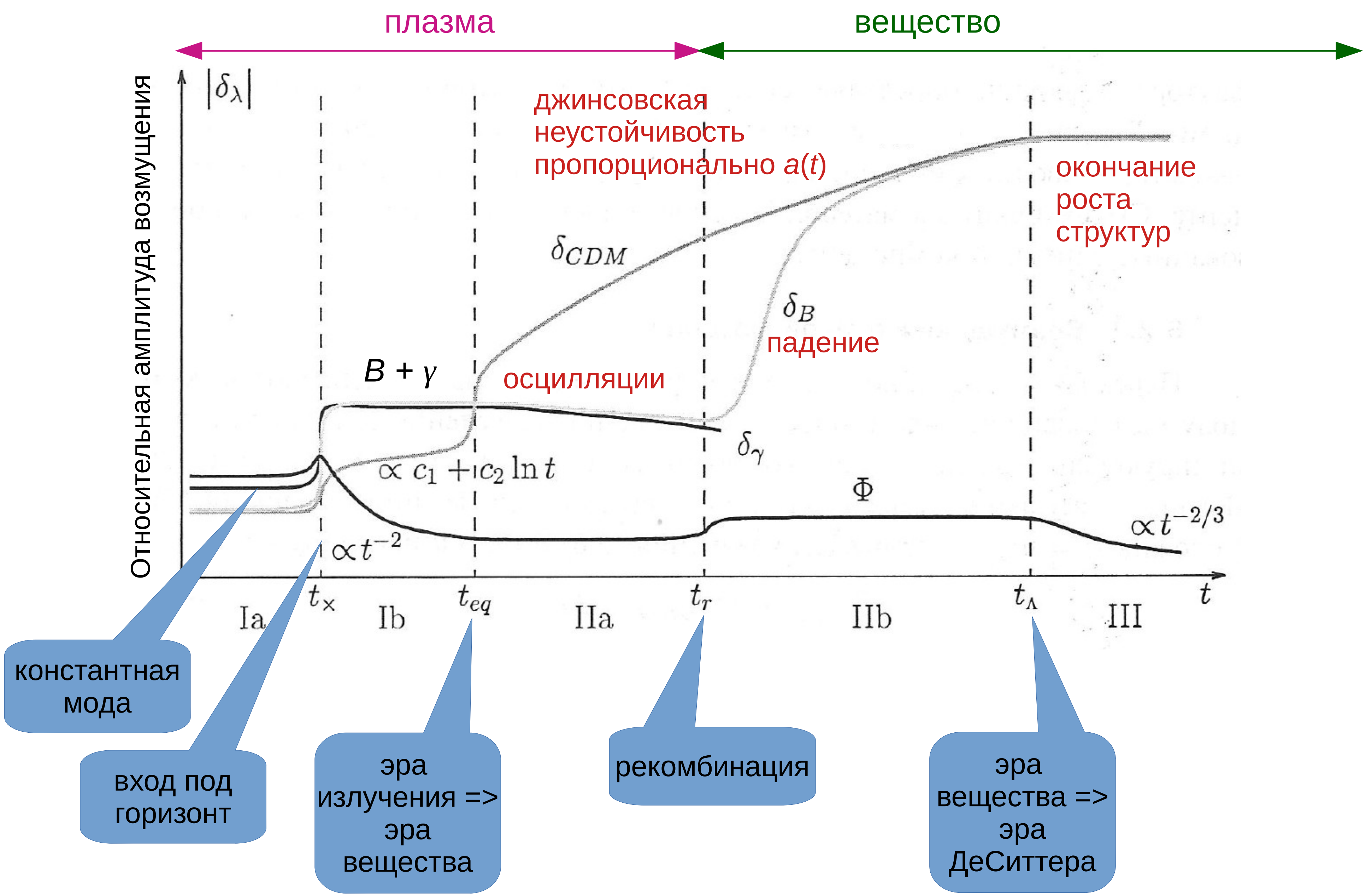


Космологические возмущения видны не только в анизоторпии температуры/поляризации CMB!

Космологические возмущения видны в распределении галактик.

Это дает возможность определеять космологические параметры и по анизотропии CMB, и «локально» – по распределению галактик в пространстве (вместе с другими локальными методами).

Эволюция космологических возмущений, джинсовская неустойчивость, роль темной материи в образовании структур



Анизотропия температуры реликтового излучения

Средняя температура реликтового микроволнового фона (CMB, Cosmic Microvawe Background)
$T_0 = 2.725 \pm 0.001\,\mathrm{K}$

Есть два типа анизотропии:

• Диполь $\delta T/T \sim 10^{-3}$ – эффект Допплера соответствующий движению со скоростью $v = 369 \pm 2$ км/сек относительно сопутствующей системы в направлении созвездия Гидры. Часть амплитуды может иметь космологическое происхождение, но много меньше наблюдаемого значения.

• Более высокие мультиполи космологического происхождения $\delta T/T \sim 5 \times 10^{-5}$ – основа количественной космологии (но не единственная, что важно).

Дипольная компонента $l = 1$ вычитается.

Анизотропия температуры:

$$\delta T_0(\mathbf{n}) = T(\mathbf{n}) - T_0 \tag{12.31}$$

$$\Theta_0(\mathbf{n}) \equiv \frac{\delta T_0(\mathbf{n})}{T_0} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}) \tag{12.32}$$

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!)}{(l+|m|)!}} \sin^{|m|} \frac{d^{|m|} P_l(\cos\theta)}{(d\cos\theta)^{|m|}} e^{im\varphi} \tag{12.33}$$

$$a^*_{l,m} = (-1)^m a_{l,-m} \quad \text{(вещественность)} \tag{12.34}$$

$$a_{lm} = \int d\mathbf{n}\, \Theta_0(\mathbf{n}) Y^*_{lm}(\mathbf{n}) \tag{12.35}$$

Y_{lm} – неоднородности масштаба π/l

• Коэффициенты a_{lm} линейно определяются через начальные возмущения $\mathcal{R} \Rightarrow$

• Если начальные возмущения – гауссовы случайные поля, то и a_{lm} – набор гауссовых случайных величин.

• Если Вселенная совершенно изотропна и флуктуации случайны, то a_{lm} не должны коррелировать при различных l, m

• Смысл корелляций: в *ансамбле вселенных, таких как наша* (!)

• Тогда, *усредняя по ансамблю*

$$\langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle = C_l \cdot \delta_{ll'} \delta_{mm'} \tag{12.36}$$

• Имея одну вселенную, измерить C_l невозможно.

• Но для больших l есть много гармоник
$m = -l, \ldots, +l$ (не меньше 5),
поэтому можно найти *среднее* C_l по набору,
и можно даже проверить гауссов характер флуктуаций.

$$\langle C_l \rangle = \frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 \tag{12.37}$$

Несмотря на то, что ансамбль вселенных нам недоступен, каую-то оценку C_l получить можно.
Однако ошибка в определении C_l неустранима!

Коэффициенты a_{lm} зависят от ориентации системы координат, в которой они вычисляются.

• Корректны ли определения (12.36) и (12.37)?

Величины $\langle C_l \rangle$ – не зависят от системы координат:

$$\sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 =$$

$$= \sum_{m=-l}^{+l} \int d\mathbf{n}_1 \Theta_0(\mathbf{n}_1) Y_{lm}(\mathbf{n}_1) \int d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_2) Y^*_{lm}(\mathbf{n}_2) =$$

$$= \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y^*_{lm}(\mathbf{n}_2) =$$

$$= \left\langle \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y^*_{lm}(\mathbf{n}_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \right\rangle =$$

$$= \frac{2l+1}{4\pi} \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.38)$$

$$\boxed{\langle C_l \rangle = \frac{1}{4\pi} \int d\mathbf{n}_1 d\mathbf{n}_2 \Theta_0(\mathbf{n}_1) \Theta_0(\mathbf{n}_2) P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)} \quad (12.39)$$

Под интегралом есть зависимость только от относительной ориентации векторов чеорез $(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2)$, следовательно нет зависимости от ориетации системы координат.

Точного значения C_l, какое дало бы усреднение по ансамблю, не получим!

Какова ошибка (стандартное отклонение) $\delta C_l =$?

$$\sigma^2 C_l = \frac{1}{(2l+1)^2} \sigma^2 \left(\sum_{m=-l}^{+l} |a_{lm}|^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{(2l+1)^2} \sigma^2 (\chi^2_{2l+1}) \langle |a_{lm}| \rangle^2 =$$

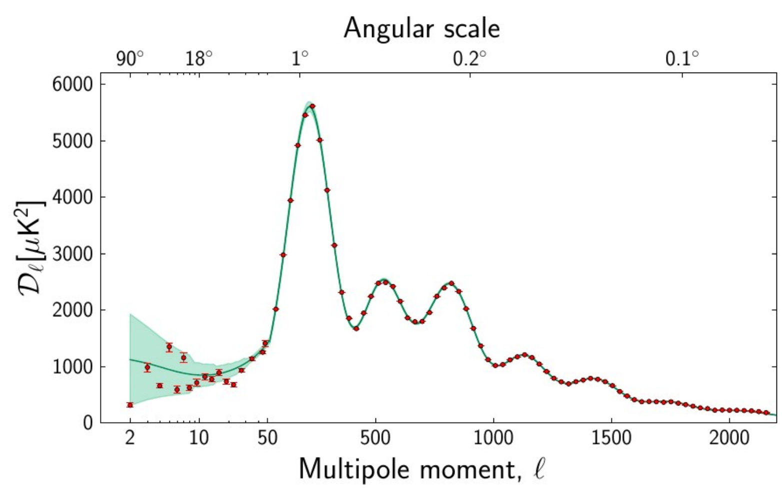
$$= \frac{1}{(2l+1)^2} 2(2l+1) C_l^2 = \frac{2C_l^2}{2l+1} \Rightarrow \quad (12.40)$$

$$\boxed{\delta C_l \equiv \sqrt{\sigma^2 C_l} = \frac{C_l}{\sqrt{l+\frac{1}{2}}}} \quad (12.41)$$

δC_l – космическая неопределенность, cosmic variance.

• Предсказания величины коэффициентов C_l не могут быть проверены с точностью, выше $\delta C_L \Rightarrow$

• Космологические параметры не могут быть определены со сколь угодно высокой точностью



Выразим $\langle \delta T^2 \rangle$ через коэффициенты C_l.

Двухточечная корреляционная функция (усреднение по ансамблю вселенных):

$$\langle \delta T_0(\mathbf{n}_1)\delta T_0(\mathbf{n}_2)\rangle = \langle \delta T_0(\mathbf{n}_1)\delta T_0^*(\mathbf{n}_2)\rangle =$$

$$= T_0^2 \left\langle \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{+l_1} a_{l_1 m_1} Y_{l_1 m_1}(\mathbf{n}_1) \sum_{l_2=2}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{+l_2} a^*_{l_2 m_2} Y^*_{l_2 m_2}(\mathbf{n}_2) \right\rangle =$$

$$= T_0^2 \sum_{l_1=2}^{\infty} \sum_{m_1=-l_1}^{+l_1} \sum_{l_2=2}^{\infty} \sum_{m_2=-l_2}^{+l_2} \langle a_{l_1 m_1} a^*_{l_2 m_2} \rangle Y_{l_1 m_1}(\mathbf{n}_1) Y^*_{l_2 m_2}(\mathbf{n}_2) =$$

$$= \backslash \langle a_{l_1 m_1} a^*_{l_2 m_2} \rangle = C_{l_1} \delta_{l_1 l_2} \delta_{m_1 m_2} \backslash =$$

$$= T_0^2 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} C_l Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y^*_{lm}(\mathbf{n}_2) =$$

$$= \Bigg\backslash \sum_{m=-l}^{+l} Y_{lm}(\mathbf{n}_1) Y^*_{lm}(\mathbf{n}_2) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \Bigg\backslash =$$

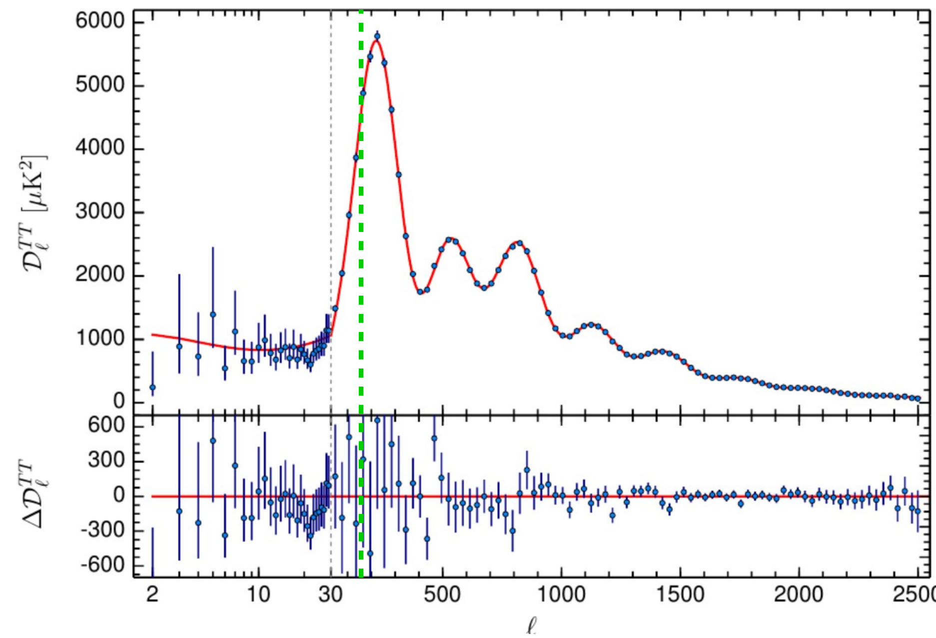
$$= T_0^2 \sum_{l=2}^{\infty} C_l \, \frac{2l+1}{4\pi} \, P_l(\mathbf{n}_1 \mathbf{n}_2) \quad (12.42)$$

$$\langle \delta T_0^2(\mathbf{n}) \rangle = \backslash P_l(1) = 1 \backslash =$$

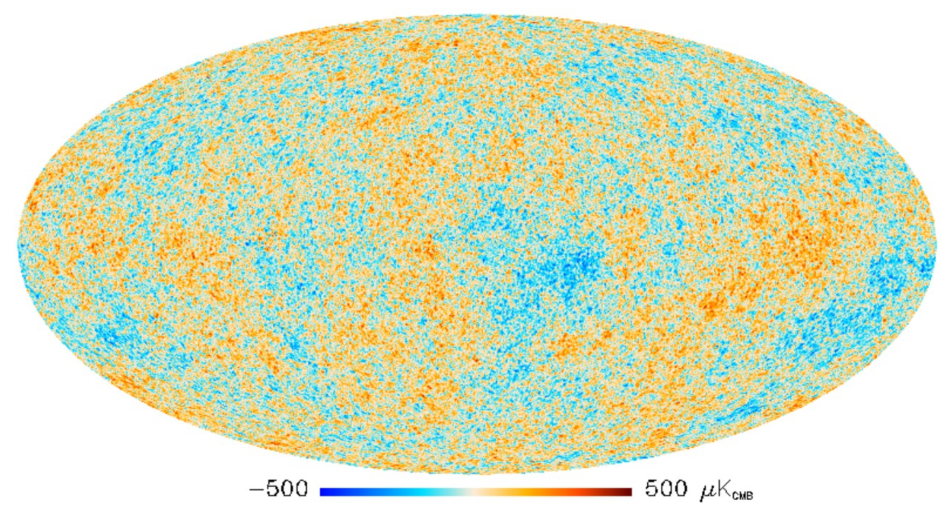
$$= T_0^2 \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} C_l \approx \backslash \text{большие } l \backslash \approx$$

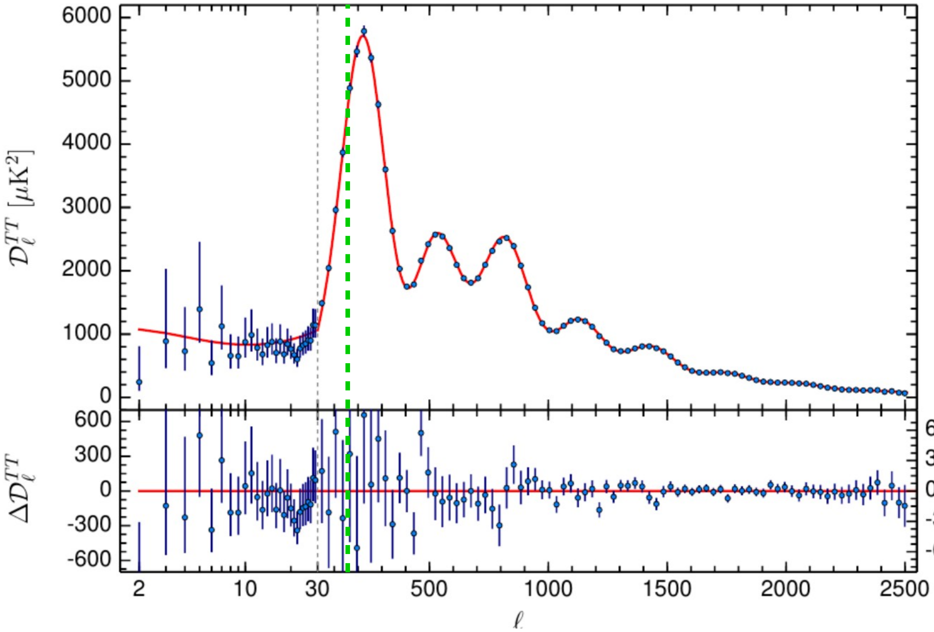
$$\approx T_0^2 \int_0^{\infty} \frac{l+1/2}{2\pi} C_l \, l \, \frac{1}{l} \, dl \cong \int_0^{\infty} T_0^2 \frac{l(l+1)}{2\pi} C_l \, d(\ln l) \quad (12.43)$$

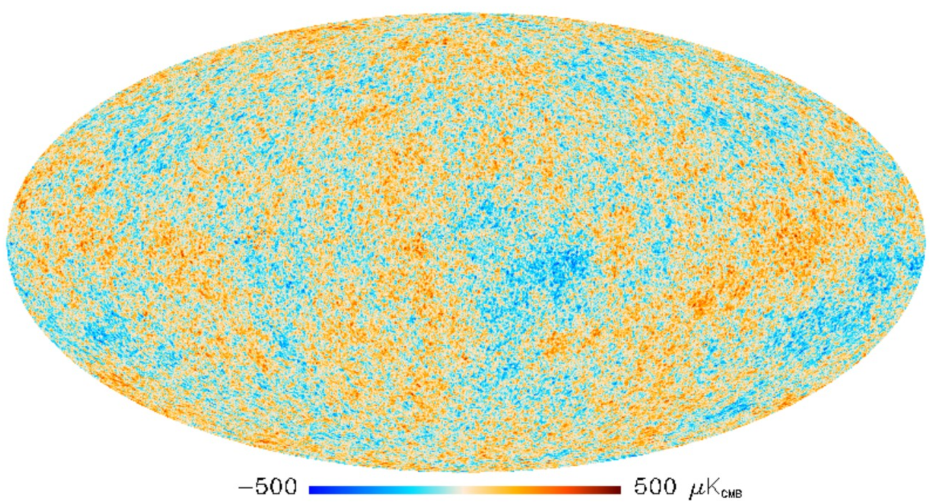
$$\boxed{\mathcal{D}_l \equiv T_0^2 \, \frac{l(l+1)}{2\pi} \, C_l} \quad (12.44)$$



$$\mathcal{D}_l^{TT} \equiv \mathcal{D}_l$$







Структура углового спектра анизотропии температуры CMB – качественно

• Адиабатические моды, вошедшие под горизонт после рекомбинации никогда не осциллировали и на момент рекомбинации пребывали в константной моде
$\Rightarrow$
На масштабах больше горизонта событий на момент рекомбинации ожидается спектр флуктуаций, близкий плоскому спектру Гаррисона-Зельдовича.

• Моды, вошедшие под горизонт до рекомбинации, осциллировали с фиксированной начальной фазой, причем частота пропорциональна k
$\Rightarrow$
к поверхности последнего рассеяния придут с разными фазами и будет картина осцилляций в зависимости от l

• Граница между режимами:
Видимый размер горизонта рекомбинации 1.1° (стандартная линейка)
$\Rightarrow$
$l \approx 160 \pm$ некоторая переходная область.

• При больших k имеет место затухание оцилляций
$\Rightarrow$
Должны быть механизмы затухания, и они есть (см. далее).

Разные вклады в видимую анизотропию температуры CMB

• Вопрос: Как влияют возмущения метрики и скорость среды на частоту регистрируемых фотонов?

Поверхность последнего рассеяния имеет конечную толщину (продолжительность), но считаем ее равной нулю –
приближение мгновенного отщепления фотонов.

• Решим уравнения движения для фотонов и проследим за 0-компонентой импульса, которая связана с частотой.

Плоская метрика с возмущениями

$$ds^2 = a^2\gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{12.45}$$

По причине конформной инвариантности ЭМ поля (см. (4.62) и далее) геодезические фотонов можно вычислять в конформноплоской метрике с возмущениями $\gamma_{\mu\nu}$.

Уравнение геодезической в конформной метрике $\gamma_{\mu\nu}$:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{dx^\nu}{d\lambda}\frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0 \tag{12.46}$$

λ – произвольный параметр, $\gamma^\mu_{\nu\rho}$ – связности в конформной метрике.
Касательный вектор («импульс»)

$$P^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \Rightarrow \tag{12.47}$$

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} + \gamma^\mu_{\nu\rho}P^\nu P^\rho = 0 \tag{12.48}$$

Получим уравнения для P^μ как функций конформного времени (избавимся от λ).

$$\frac{dP^\mu}{d\lambda} = \frac{d\eta}{d\lambda}\frac{dP^\mu}{d\eta} = \frac{dx^0}{d\lambda}\frac{dP^\mu}{d\eta} = P^0\frac{dP^\mu}{d\eta} \Rightarrow \tag{12.49}$$

$$P^0\frac{dP^\mu}{d\eta} + \gamma^\mu_{\nu\rho}P^\nu P^\rho = 0 \Rightarrow \tag{12.50}$$

$$\frac{dP^\mu}{d\eta} + \gamma^\mu_{\nu\rho}\frac{P^\nu}{P^0}\frac{P^\rho}{P^0}P^0 = 0 \Rightarrow \tag{12.51}$$

0-компонента:

$$\boxed{\frac{dP^0}{d\eta} + \gamma^0_{\nu\rho}\frac{P^\nu}{P^0}\frac{P^\rho}{P^0}P^0 = 0} \tag{12.52}$$

---

1. Скалярные возмущения метрики, Ньютонова калибровка

(10.52), (10.59):

$$h_{00} = 2\Phi, \;\; h_{ij} = -2\Phi\delta_{ij} \tag{12.53}$$

Элементарно считаются ★:

$$\gamma^0_{00} = \frac{1}{2}h'_{00}, \;\; \gamma^0_{0i} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00}, \;\; \gamma^0_{ij} = -\frac{1}{2}h'_{ij} \Rightarrow \tag{12.54}$$

$$\gamma^0_{00} = \Phi', \;\; \gamma^0_{0i} = \partial_i\Phi, \;\; \gamma^0_{ij} = -\Phi'\delta_{ij} \tag{12.55}$$

Из (12.52) ★

$$\frac{dP^0}{d\eta} + 2P^0\frac{P^i}{P^0}\partial_i\Phi = 0 \tag{12.56}$$

$P^i/P^0 = n^i$ – единичный (световой) вектор вдоль направления движения (почему? ★) ⇒

$$\frac{dP^0}{d\eta} + 2P_0\mathbf{n}\nabla\Phi = 0 \tag{12.57}$$

$$\frac{dP^0}{d\eta} = -2P_0\mathbf{n}\nabla\Phi = 2\Phi' P^0 - 2(\Phi' + \mathbf{n}\nabla\Phi)P^0 \tag{12.58}$$

$$(\Phi' + \mathbf{n}\nabla\Phi) = \frac{d\Phi(\eta, \mathbf{x})}{d\eta} \tag{12.59}$$

$$\frac{dP^0}{d\eta} = 2\left(\Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta}\right)\cdot P^0 \tag{12.60}$$

Общее решение:

$$\ln P^0(\eta) = \int_{\eta_0}^{\eta} 2\left(\Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta}\right)d\eta \tag{12.61}$$

η_0 – некоторая константа (не нужна и не мешает).

Как изменится P_0 от η' до η'':

$$\ln\left(\frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')}\right) = \int_{\eta'}^{\eta''} 2\left(\Phi' - \frac{d\Phi}{d\eta}\right)d\eta \tag{12.62}$$

$$\ln\left(\frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')}\right) \cong \frac{P^0(\eta'')}{P^0(\eta')} - 1 = \frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} \Rightarrow \tag{12.63}$$

$$\frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} = 2\int_{\eta'}^{\eta''}\Phi' d\eta - 2[\Phi(\eta'') - \Phi(\eta')] \tag{12.64}$$

Как изменяется P^0 нашли.

Связь частоты $\Omega(\eta)$ с P^0

Фотон испущен элементом среды с (конформной) скоростью U^μ, конформной частотой Ω в системе покоя среды.

Работаем в конформно-Ньютоновой системе координат, $\gamma_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$

Для скалярных возмущений в линейном порядке

$$U^0 = 1 - \Phi,\ U^i = v^i \tag{12.65}$$

$$U_0 = 1 + \Phi,\ U_i = -v^i \tag{12.66}$$

[ср. (9.97), (9.98) для возмущения скоростей.]

Можно локально выбрать координаты так, что будет $\tilde{\gamma}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, а в качестве λ взять время в этой с.к.

Тогда:

$$\left.\begin{array}{l}\Omega = \tilde{p}^0 \\ \tilde{U}_\mu = (1,0,0,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \Omega = \tilde{U}_0\tilde{p}^0 \Rightarrow \tag{12.67}$$

Ω – скаляр (частота в системе среды).

$$U_\mu p^\mu \text{ – тоже скаляр.} \tag{12.68}$$

Следовательно $\Omega = U_\mu p^\mu$, это есть общековариантное выражение для частоты.

Подставляем (12.66) в (12.68)

$$\Omega = (1+\Phi)p^0 - v_i p^i = \left\backslash n^i = \frac{p^i}{p^0} \Rightarrow p^i = n^i p^0 \right\backslash = $$
$$= (1+\Phi)p^0 - v_i n^i p^0 = (1 + \Phi - \mathbf{vn})p^0 \tag{12.69}$$

$$\boxed{\Omega(\eta') = [1 + \Phi(\eta') - \mathbf{nv}(\eta')]p^0(\eta')} \qquad (12.70)$$

Совершенно аналогичным образом, для <u>*приема*</u> фотона в момент η'' наблюдателем со скоростью $\mathbf{v}(\eta'')$

$$\Omega(\eta'') = [1 + \Phi(\eta'') - \mathbf{nv}(\eta'')]p^0(\eta'') \qquad (12.71)$$

Изменение частоты при распространении

$$\frac{\Omega(\mathbf{n},\eta'') - \Omega(\mathbf{n},\eta')}{\Omega(\mathbf{n},\eta')} \cong \backslash\text{до первого порядка}\backslash \cong$$

$$\cong \frac{p^0(\eta'') - p^0(\eta')}{p^0(\eta')} + \Phi(\eta'') - \Phi(\eta') + \mathbf{nv}(\eta') - \mathbf{nv}(\eta'') =$$

$$= \Bigg\backslash (12.64),\ \frac{p^0(\eta'') - p^0(\eta')}{p^0(\eta')} = \frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} \Bigg\backslash =$$

$$= 2\int_{\eta'}^{\eta''} \Phi' d\eta + \Phi(\eta') - \Phi(\eta'') + \mathbf{nv}(\eta') - \mathbf{nv}(\eta'') \qquad (12.72)$$

• Сдвиг конформной частоты пропорционален самой частоте $\Rightarrow$
• Форма спектра не меняется $\Rightarrow$
• Наблюдается планковский спектр, с температурой (пропорциональна частоте), зависящей от направления

Возмущения наблюдаемой температуры

В момент рекомбинации были флуктуации температуры, обусловленные флуктуацией плотности $B\gamma$-среды:

$$\rho_\gamma = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \Rightarrow \qquad (12.73)$$

$$\delta_\gamma = \frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} = \frac{4\delta T}{T} = \frac{4\delta\omega}{\omega} \Rightarrow \frac{\delta T}{T} = \frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{1}{4}\delta_\gamma \qquad (12.74)$$

К этой величине величине добавится (12.72).
Окончательно:

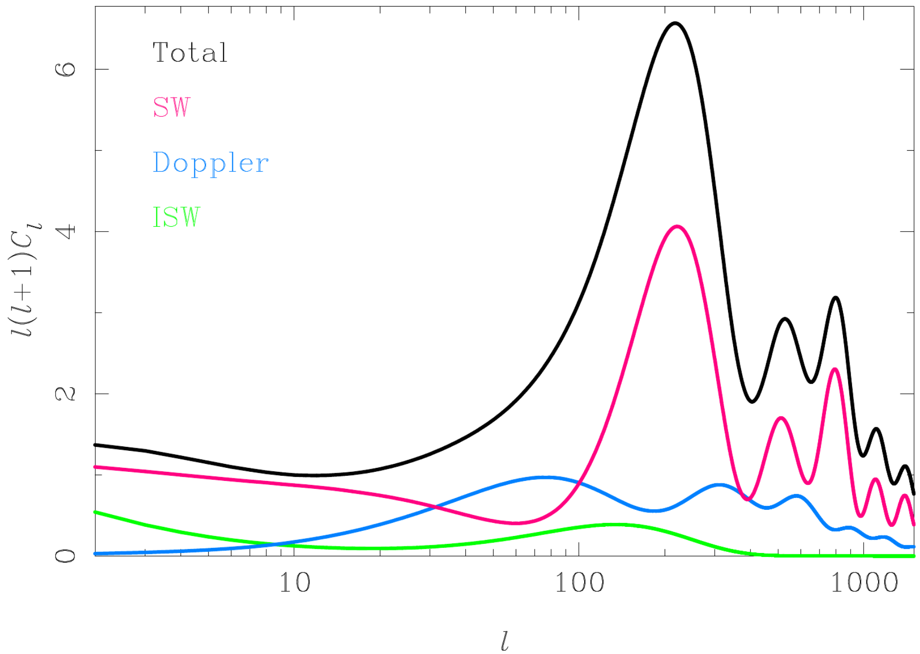
$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{T}(\eta_0) &= \frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta_r) + [\Phi(\eta_r) - \Phi(\eta_0)] + && (12.75)\\ &+2\int_{\eta_r}^{\eta_0} \Phi' d\eta + && (12.76)\\ &+\mathbf{nv}(\eta_r) - \mathbf{nv}(\eta_0) && (12.77) \end{aligned}$$

• (12.75) – эффект Сакса-Вольфа (флуктуация температуры + флуктуация гравитационного потенциала)
• (12.76) – интегральный эффект Сакса-Вольфа (фотон падает в один потенциал, а выбирается из другого) – следствие нелинейной эволюции возмущений, есть корреляции с крупными структурами – скоплениями галактик
• (12.77) – эффект Допплера

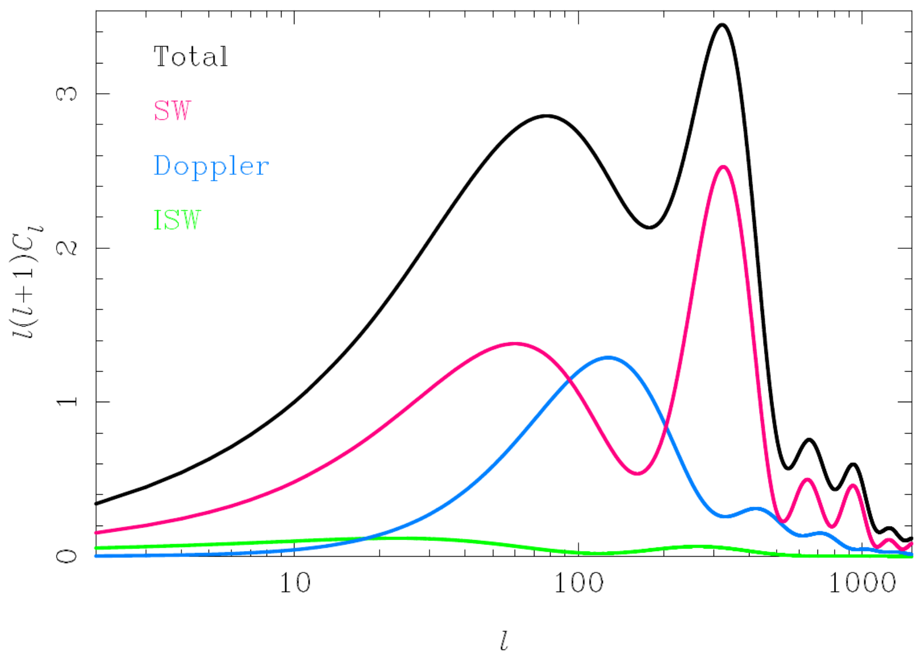
Вклад $\mathbf{nv}(\eta_0)$ (диполь) вычитается, вклад $\Phi(\eta_0)$ одинаков для всех направлений (монополь):

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{T}(\mathbf{n},\eta_0) &= \frac{1}{4}\delta_\gamma(\eta_r) + \Phi(\eta_r) + && (12.78)\\ &+2\int_{\eta_r}^{\eta_0} \Phi' d\eta + && (12.79)\\ &+\mathbf{nv}(\eta_r) && (12.80) \end{aligned}$$

Адиабатические моды:

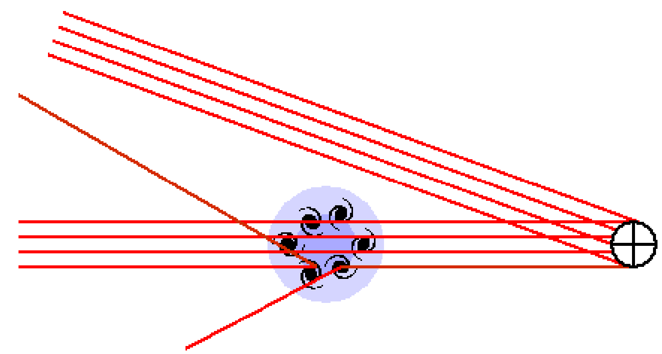


Моды постоянной кривизны:



Затухание, демпфирование и другие более тонкие эффекты:

- Конечная толщина последней поверхности рассеяния $\Rightarrow$ размывание анизотропии на малых масштабах.
- Поглощение в эпоху реонизации $\Rightarrow$ понижение контраста при всех масштабах.
- Эффект Силка (затухание Силка) – немонолитность среды $B\gamma$ вблизи поверхности рассеяния, транспортировка фотонов без изменения энергии $\Rightarrow$ затухание осцилляций на малых масштабах.
- Линзирование – смазывает картинку на малых масштабах.
- Эффект Сюняева-Зельдовича (подогрев излучения быстрыми электронами).



2. Тензорные возмущения метрики

Легко считается:

$$\gamma^0_{ij} = -h'_{ij}/2 \Rightarrow \tag{12.81}$$

Из общего уравнения для P^0 (12.52):

$$\frac{dP^0}{d\eta} + \gamma^0_{\nu\rho}\frac{P^\nu}{P^0}\frac{P^\rho}{P^0}P^0 = \frac{dP^0}{d\eta} - \frac{h'_{ij}}{2}n^i n^j P^0 = 0 \Rightarrow \tag{12.82}$$

$$\frac{P^0(\eta'') - P^0(\eta')}{P^0(\eta')} = \frac{1}{2}\int_{\eta'}^{\eta''} n^i h'_{ij} n^j \, d\eta \tag{12.83}$$

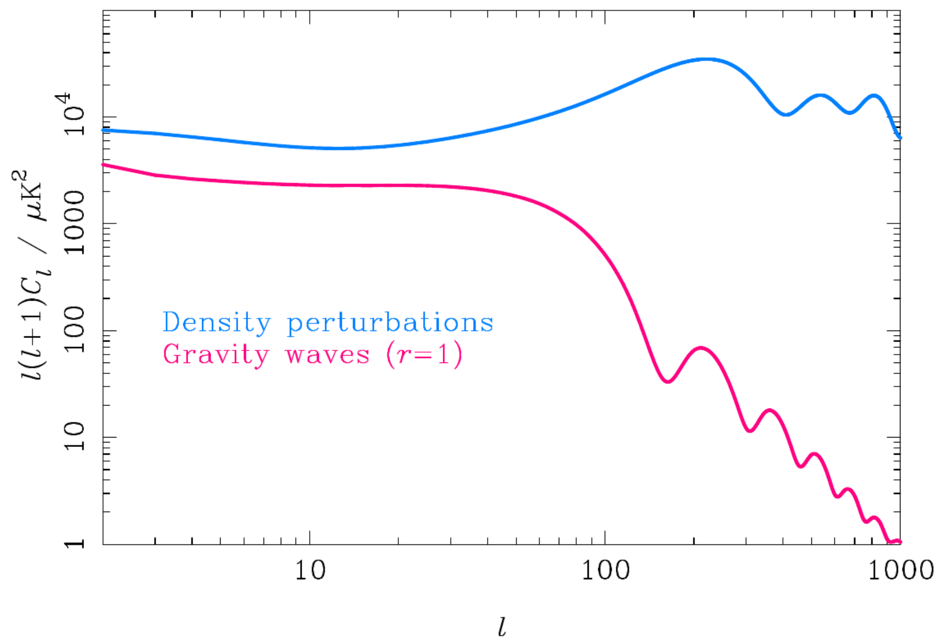
С тензорными модами не связаны вариации скорости среды, т.е. надо считать $U^0 = 1, U^i = 0 \Rightarrow$
Измеряемая частота

$$\Omega(\eta'') = P^0(\eta'') \Rightarrow \frac{\delta\omega}{\omega} = \frac{\delta T}{T} = \frac{\delta P^0}{P^0} \Rightarrow \tag{12.84}$$

$$\frac{\delta T}{T}(\mathbf{n}, \eta_0) = \frac{1}{2}\int_{\eta_r}^{\eta_0} n^i h^{TT\prime}_{ij} n^j \, d\eta \tag{12.85}$$

– тензорный вариант интегрального эффекта Сакса-Вольфа.

Тензорные моды после входа под горизонт падают как $1/a \Rightarrow$
Ожидается вклад только мод, поздно вошедших под горизонт $\Rightarrow$
Большие масштабы неоднородностей



Тензорные моды проще обнаружить по вкладу в поляризацию CMB (см. далее)