Лекция 9

Космологические возмущения: фоновая метрика, конформное время. Джинсовская неустойчивость. Скалярные, векторные, тензорные моды возмущений.

Космологические возмущения: фоновая плоская метрика, конформное время.

$$d\eta = dt/a; \quad dt = ad\eta; \quad dt/d\eta = a \tag{9.1}$$

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j] = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{9.2}$$

Перепишем уравнения в производных по конформному времени:

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{dt}{d\eta}\frac{d}{dt} = a\frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{1}{a}\frac{d}{d\eta} \tag{9.3}$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'}{a^2} \tag{9.4}$$

Уравнение Фридмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \Rightarrow \left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \tag{9.5}$$

(i, j)-компонента уравнений Эйнштейна ★

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi G p \Rightarrow 2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi G p \tag{9.6}$$

Ковариантный закон сохранения энергии

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \rho' + 3\frac{a'}{a}(\rho + p) = 0 \tag{9.7}$$

Космологические решения $a(\eta)$ ★:

$$\text{РД-стадия: } \eta = \text{const} \cdot t^{1/2}; \; a(\eta) = \text{const} \cdot \eta \tag{9.8}$$

$$\text{ДМ-стадия: } \eta = \text{const} \cdot t^{1/3}; \; a(\eta) = \text{const} \cdot \eta^2 \tag{9.9}$$

$$\Lambda-\text{стадия: } \eta = -\text{const} \cdot e^{-H_{dS}t}, \; \eta < 0; \; a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta} \tag{9.10}$$

$$H_{dS}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda \tag{9.11}$$

Коэффициенты в (9.8) и (9.9) – через a_0 и измеримые величины

РД-стадия (+ адиабатичность $T \lesssim 100$ ГэВ)

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{8\pi}{3}G\frac{\pi^2}{30}g_* T^4 \tag{9.12}$$

Сохранение энтропии:

$$g_* a^3 T^3 = g_*^0 a_0^3 T_0^3 \tag{9.13}$$

$$T^3 = \frac{g_*^0}{g_*}\frac{a_0^3}{a^3}T_0^3 \Rightarrow T = \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3}\frac{a_0}{a}T_0 \tag{9.14}$$

$$\rho_c \Omega_{rad} = \frac{\pi^2}{30}g_*^0 T_0^4 \Rightarrow T_0^4 = \frac{\Omega_{rad}\rho_c}{\frac{\pi^2}{30}g_*^0} \tag{9.15}$$

Подставляем (9.15) в (9.14), (9.14) в (9.12):

$$H^2 = \left(\frac{8\pi}{3}G\rho_c\right)\left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\Omega_{rad} = \\ = H_0^2\left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3}\left(\frac{a_0}{a}\right)^4\Omega_{rad} \tag{9.16}$$

$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \backslash t \to a(t): \; da = \dot{a}dt, \; dt = da/\dot{a} \backslash =$$

$$= \int_0^a \frac{1}{a}\frac{da}{\dot{a}} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \backslash(9.16)\backslash =$$

$$= \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/6} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \sqrt{\Omega_{rad}}} = \frac{1}{H_0}\left(\frac{g_*}{g_*^0}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0^2}\frac{a}{\sqrt{\Omega_{rad}}} \tag{9.17}$$

$$\boxed{\eta = \frac{1}{H_0}\left(\frac{g_*}{g_*^0}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega_{rad}}}\frac{a}{a_0}} \tag{9.18}$$

ДМ-стадия (но не Λ)

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho_c \tag{9.19}$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho_M = \frac{8\pi}{3} G\rho_M^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow \tag{9.20}$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_M^0}{\rho_c}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow H^2 = H_0^2 \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \tag{9.21}$$

$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} =$$

$$= \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \sqrt{\Omega_M} (a_0/a)^{3/2}} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \sqrt{\frac{a}{a_0}} \tag{9.22}$$

$$\boxed{\eta^2 = \frac{a}{a_0}\frac{4}{a_0^2 H_0^2 \Omega_M}} \tag{9.23}$$

Конформные времена $\eta_0, \eta_r, \eta_{eq}$ – через a_0 и измеримые величины

Уравнение Фридмана:

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad}(1+z)^4} \tag{9.24}$$

$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} =$$

$$= \Big\backslash z + 1 = \frac{a_0}{a}; \; da = -\frac{a_0}{(z+1)^2} dz \Big\backslash =$$

$$= \int_\infty^z -\frac{dz}{a_0 H(z)} =$$

$$= \frac{1}{a_0 H_0} \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad}(1+z)^4}} \tag{9.25}$$

Конформное время современной эпохи:

$$\eta_0 = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times \times \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + (1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}(1+z)^4}} = = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times I(\Omega_M) \quad (9.26)$$

$$\Omega_M = 0.31,\ \Omega_\Lambda = 0.69, \Omega_{rad} = 2\cdot 10^{-4} \Rightarrow I(\Omega_M) \approx 0.89 \quad (9.27)$$

Конформное время последнего рассеяния (рекомбинации):

$$\eta_r = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{2}\int_{z_r}^\infty \frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}(1+z)^4}} = = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \mathcal{F}\left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}\right) \quad (9.28)$$

$\mathcal{F}$ считается:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}\right) = \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} - \sqrt{\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} =$$

$$\Big\backslash \frac{\Omega_M}{\Omega_{rad}} = 1 + z_{eq} \bigstar \Big\backslash = \sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}}$$

$$\mathcal{F} = 0.017 \quad (9.29)$$

Легко считается угол видимости горизонта рекомбинации:

$$\Delta\theta_r = \eta_r/\eta_0 = 0.019;\ \Delta\theta_r = 1.1^{\circ} \quad (9.30)$$

$$\eta_{eq} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1+z_{eq}}}; \quad \mathcal{F} = 0.0076 \quad (9.31)$$

$$\frac{\eta_r}{\eta_{eq}} = 2.3;\ \frac{\eta_0}{\eta_{eq}} = 1.2\cdot 10^2 \quad (9.32)$$

η_r и η_{eq} близки, но не совпадают.

$$a_0\eta_{eq} = \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1+z_{eq}}}(\sqrt{2}-1) \quad (9.33)$$

$$a_0\eta_r = \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_M}} \left(\sqrt{\frac{1}{1+z_r} + \frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}}\right) \quad (9.34)$$

$$a_0\eta_0 = \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_M}} I(\Omega_M); \quad I(\Omega_M) = 0.89 \quad (9.35)$$

$$a_0\eta_{eq} = \frac{a_0}{a_{eq}}(a_{eq}\eta_{eq}) = \frac{a_0}{a_{eq}} l_H^{eq} \quad (9.36)$$

– до каких размеров сейчас растянулся горизонт на момент перехода РД→ДМ. И т.д.

$$a_0\eta_{eq} = 120\,\text{Мпк} \quad (9.37)$$

$$a_0\eta_r = 510\,\text{Мпк} \quad (9.38)$$

$$a_0\eta_0 = 14.1\,\text{Гпк} = 46.0\,\text{Млрд. св. лет} \quad (9.39)$$

Космологические возмущения

Джинсовская неустойчивость

Ньютоновская гравитация + классическая гидродинамика нерелятививистсткой идеальной жидкости.

Гравитационный потенциал:

$$\boxed{\Delta\varphi = 4\pi G\rho} \tag{9.40}$$

Уравнение неразрывности:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0} \tag{9.41}$$

Уравнение Эйлера для идеальной жидкости:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho\nabla\varphi - \nabla p \tag{9.42}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \Rightarrow \tag{9.43}$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\rho\nabla\varphi - \nabla p} \tag{9.44}$$

Начальные условия – бесконечная однородная статическая среда («вселенная Ньютона»):

$$\rho(\mathbf{x}) = \text{const},\ \ p(\mathbf{x}) = \text{const},\ \ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0,\ \ \varphi(\mathbf{x}) = 0 \tag{9.45}$$

[Заведомо нереалистично, т.к. $\Delta\varphi = 4\pi G\rho \neq 0$]

Изучаем малые возмущения.
Линеаризованные уравнения:
Из (9.40):

$$\Delta(\varphi + \delta\varphi) = 4\pi G(\rho + \delta\rho) \Rightarrow \tag{9.46}$$

$$\boxed{\Delta\delta\varphi = 4\pi G\delta\rho} \tag{9.47}$$

Из (9.41):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho + \delta\rho) + \nabla[(\rho+\delta\rho)(\mathbf{v}+\delta\mathbf{v})] = \\ = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v} + \delta\rho\mathbf{v} + \rho\delta\mathbf{v} + \delta\rho\delta\mathbf{v}) = \\ = \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v})\right] + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\delta\mathbf{v}) = \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\nabla\delta\mathbf{v} \Rightarrow\end{aligned} \tag{9.48}$$

$$\boxed{\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\nabla\delta\mathbf{v} = 0} \tag{9.49}$$

Из (9.44):

$$\rho(\delta\mathbf{v}\nabla)\delta\mathbf{v} \simeq 0 - \text{2-й порядок малости} \tag{9.50}$$

$$\boxed{\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\delta p - \nabla\delta\varphi} \tag{9.51}$$

Уравнение состояния: $p = p(\rho)$

$$\delta p = \frac{dp}{d\rho}\delta\rho \equiv u_s^2\delta\rho \tag{9.52}$$

Из (9.49), подставляя $\partial\delta\mathbf{v}/\partial t$ из (9.51)

$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}+\rho\nabla\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t}=$$
$$=\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}+\rho\nabla\left(-\frac{1}{\rho}\nabla\delta p-\nabla\delta\varphi\right)=\Big\backslash\nabla\delta p=\nabla\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\delta\rho\right)\Big\backslash=$$
$$=\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}+\rho\nabla\left(-\frac{1}{\rho}u_s^2\nabla\delta\rho\right)-4\pi\rho G\delta\rho=$$
$$=\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}-u_s^2\Delta\delta\rho-4\pi G\rho\delta\rho=0 \quad (9.53)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}-u_s^2\Delta\delta\rho-4\pi G\rho\delta\rho=0} \quad (9.54)$$

[Если $G=0$, то простое волновое уравнение]

Ищем решения в виде малых линейных волн:

$$\delta\rho(\mathbf{x},t)=\int d^3q\, e^{i[\mathbf{qx}-\omega(\mathbf{q})t]}\delta\rho(\mathbf{q})=\int d^3q\, e^{i\mathbf{qx}}\delta\rho(\mathbf{q},t) \quad (9.55)$$

$$\frac{\partial^2\delta\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}=\int[-\omega^2(\mathbf{q})]d^3q e^{i[\mathbf{qx}-\omega(\mathbf{q})t]}\delta\rho(\mathbf{q})$$
$$\Delta\delta\rho(\mathbf{x},t)=\int(-q^2)d^3q e^{i[\mathbf{qx}-\omega(\mathbf{q})t]}\delta\rho(\mathbf{q}) \quad (9.56)$$

Подставляем в (9.54):

$$\int[-\omega^2(\mathbf{q})+u_s^2q^2-4\pi G\rho]e^{i(\mathbf{qx}-\omega t)}\delta\rho(\mathbf{q})d^3q=0 \quad (9.57)$$

$\Rightarrow$ Закон дисперсии

$$\omega^2(\mathbf{q})=\omega^2(q)=u_s^2q^2-4\pi G\rho \quad (9.58)$$

Джинсовский «импульс» (волновое число) и длина волны

$$\omega^2(q)=0 \;\Rightarrow\; q_J=\sqrt{\frac{4\pi G\rho}{u_s^2}};\quad \lambda_J=\frac{2\pi}{q_J} \quad (9.59)$$

$$\lambda<\lambda_J\Rightarrow\omega^2(q)>0,\ \text{волна} \quad (9.60)$$
$$\lambda>\lambda_J\Rightarrow \text{волновых решений нет} \quad (9.61)$$
$$\omega(q)=\pm i\sqrt{4\pi G\rho-u_s^2q^2}=\pm\Omega_q,\ \Omega_q>0 \quad (9.62)$$
$$\delta\rho(q,t)=\delta\rho(q,0)e^{\pm\Omega_q t} \quad (9.63)$$

Экспоненциально растущее и экспоненциально падающее решения –
гравитационная неустойчивость Джинса.

Если $u_s=0$ (пыль) то колебательных решений нет совсем.

Однородная вселенная Ньютона неустойчива!
Стационарная модель Эйнштейна неустойчива!

Линейный и нелинейный режимы:

$$\delta(\mathbf{q},t)\equiv\frac{\delta\rho(\mathbf{q},t)}{\rho} \quad (9.64)$$

Если $\delta(\mathbf{q},t)\ll 1$ работает линейный анализ (представление Фурье).

Время входа в нелинейный режим определеяется условием

$$\delta(\mathbf{q},t_{nl})\sim 1 \quad (9.65)$$

Теория неустойчивости Джинса – прообраз теории космологических возмущений.

Возмущения (плоской) метрики и фиксация калибровки $h_{0i} = 0$

Задача: Пусть на какой-то стадии эволюции Вселенной (возможно, весьма ранней) но после горячего Большого взрыва, над фоном Фридмановского пространства имеются малые возмущения вещества (и, следовательно, метрики). Что с ними станет по мере дальнейшей эволюции Вселенной?

$$ds^2 = a^2(\eta)\gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{9.66}$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{9.67}$$

$\eta_{\mu\nu}$ – Минковский, $h_{\mu\nu}$ – возмущение.
Соглашение: Индексы *возмущений* будем поднимать/опускать метрикой Минковского:

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}h_{\rho\lambda} \text{ и т.д.} \tag{9.68}$$

Если $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, то $\gamma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ ($\bigstar$)

Теория инвариантна относительно калибровочных преобразований – произвольных диффеоморфизмов. Рассматриваем произвольные инфинитеземальные преобразования

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \;\; \xi^\mu \sim h^{\alpha\beta} \tag{9.69}$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \nabla^\mu\xi^\nu + \nabla^\nu\xi^\mu \;\bigstar \tag{9.70}$$

Как преобразуются $h^{\mu\nu}$? Используем (9.70):

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2}(\eta^{\mu\nu} - \tilde{h}^{\mu\nu}) = \\ = \frac{1}{a^2}(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) + g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda\xi^\nu + g^{\nu\lambda}\nabla_\lambda\xi^\mu \tag{9.71}$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\nu - (\eta^{\nu\lambda} - h^{\nu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\mu \tag{9.72}$$

$$(\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\nu \simeq \eta^{\mu\lambda}\nabla_\lambda\xi^\nu = \eta^{\mu\lambda}(\partial_\lambda\xi^\nu + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\xi^\sigma) = \\ = \partial^\mu\xi^\nu + \eta^{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\xi^\sigma \tag{9.73}$$

$\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}$ достаточно считать в 0-порядке:

$$\Gamma^\nu_{\sigma\lambda} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\partial_\sigma g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\sigma\lambda}) = \\ = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\eta^{\nu\rho}[\partial_\sigma(a^2\eta_{\lambda\rho}) + \partial_\lambda(a^2\eta_{\rho\sigma}) - \partial_\rho(a^2\eta_{\sigma\lambda})] = \\ = \frac{1}{a}(\partial_\sigma a\,\delta^\nu_\lambda + \partial_\lambda a\,\delta^\nu_\sigma - \partial_\rho a\,\eta^{\nu\rho}\eta_{\sigma\lambda}) \tag{9.74}$$

$$\eta^{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\xi^\sigma = \frac{1}{a}(\partial_\sigma a\,\xi^\sigma\eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda a\,\eta^{\mu\lambda}\xi^\nu - \partial_\rho a\,\eta^{\nu\rho}\xi^\mu) \tag{9.75}$$

$$(\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\nu = \\ = \partial^\mu\xi^\nu + \frac{1}{a}(\partial_\sigma a\,\xi^\sigma\eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda a\eta^{\mu\lambda}\xi^\nu - \partial_\rho a\eta^{\nu\rho}\xi^\mu) \tag{9.76}$$

$$(\eta^{\nu\lambda} - h^{\nu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\mu = \\ = \partial^\nu\xi^\mu + \frac{1}{a}(\partial_\sigma a\,\xi^\sigma\eta^{\nu\mu} + \partial_\lambda a\eta^{\nu\lambda}\xi^\mu - \partial_\rho a\eta^{\mu\rho}\xi^\nu) \tag{9.77}$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu\xi^\nu - \partial^\nu\xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu}\xi^\sigma\frac{\partial_\sigma a}{a} \tag{9.78}$$

Так как ξ^μ есть 4 произвольные функции, то их выбираем так, чтобы занулить 3 величины $h_{i0} = 0, \;\; i = 1, 2, 3$:

$$\tilde{h}^{0i} = h^{0i} - \partial^0\xi^i - \partial^i\xi^0 = 0 \tag{9.79}$$

Остается еще остаточная инвариантность для преобразований (так как они не меняют $0i$-компоненты)

$$\partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0 = 0 \tag{9.80}$$

Годится, в частности

$$\xi_i = \xi_i(\mathbf{x}),\ \xi_0 = 0 \tag{9.81}$$

В калибровке $h_{i0} = 0$:

$$\boxed{ds^2 = a^2(\eta)[(1+h_{00})d\eta^2 - (\delta_{ik} + h_{ik})dx^i dx^k].} \tag{9.82}$$

Соглашение: для трехмерных индексов возмущений, они опускаются трехмерной метрикой δ_{ij}

$$v_i = \delta_{ij} v^j = v^i \tag{9.83}$$

Для наблюдателя, покоящегося в сопутствующей системе, $dx_i = 0 \Rightarrow$

$$ds^2 = d\tau^2 = a^2(\eta)(1+h_{00})d\eta^2 \Rightarrow \tag{9.84}$$

$$d\tau = a(\eta)(1 + \frac{1}{2}h_{00})d\eta \tag{9.85}$$

Ход индивидуального времени отличается от хода космологического времени при наличии возмущений метрики!

Возмущения тензора энергии-импульса

ТЭИ идеальной жидкости:

$$T^\mu_\nu = (\rho + p)u^\mu u_\nu - \delta^\mu_\nu p \tag{9.86}$$

С возмущениями:

$$T^\mu_\nu = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)(u^\mu + \delta u^\mu)(u_\nu + \delta u_\nu) - \delta^\mu_\nu(p + \delta p) \tag{9.87}$$

Скорость в контексте космологических возмущений

Невозмущенная (координатная: η, x^i) скорость имеет только 0-компоненту: $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1 \Rightarrow a^2 \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = a^2 u^0 u^0 = 1 \Rightarrow$$
$$u^0 = \frac{1}{a}; \quad u_0 u^0 = 1 \Rightarrow u_0 = a \tag{9.88}$$

Физические скорости:

$$dX^\mu = a dx^\mu \Rightarrow V^\mu = \frac{dX^\mu}{ds} = a\frac{dx^\mu}{ds} = a u^\mu \tag{9.89}$$

$$V^0 = a u^0 = 1; \quad V^i = a u^i = 0; \tag{9.90}$$

Возмущенная скорость:

$$\hat{V}^0 = V^0 + v^0 = 1 + v^0 \tag{9.91}$$

$$\hat{V}^i = V^i + v^i = v^i - \text{физическая скорость} \tag{9.92}$$

v^0 и v^i – величины первого порядка малости.

$$\hat{V}^\mu = a\hat{u}^\mu \ \Rightarrow \ \hat{u}^\mu = \frac{1}{a}\hat{V}^\mu \tag{9.93}$$

$$\hat{u}^0 \equiv u^0 + \delta u^0 = \frac{1}{a}(1 + v^0) \tag{9.94}$$

$$\hat{u}^i \equiv u^i + \delta u^i \equiv \delta u^i = \frac{1}{a} v^i \tag{9.95}$$

Тогда v^0 жестко связана с вомущением метрики:

$$1 = g_{\mu\nu}\hat{u}^\mu\hat{u}^\nu = a^2[(\eta_{00}+h_{00})\hat{u}^0\hat{u}^0 - (\delta_{ij}+h_{ij})\hat{u}^i\hat{u}^j] =$$
$$= a^2(1+h_{00})\frac{1}{a^2}(1+v^0)^2 - (\delta_{ij}+h_{ij})\delta u^i\delta u^j \cong$$
$$\cong (1+h_{00})(1+v^0)^2 \cong 1+h_{00}+2v^0 \Rightarrow \quad (9.96)$$

$$\boxed{v^0 = -\frac{1}{2}h_{00}} \quad (9.97)$$

В линейном порядке это есть гравитационное замедление времени. Даже если $v^i = 0$ время замедляется.

$$\boxed{v^i \text{ могут быть любыми (малыми)}} \quad (9.98)$$

Найдем u_μ и δu_μ (с нижними индексами):

$$\hat{u}_\mu\hat{u}^\mu = (u_0+\delta u_0)(u^0+\delta u^0) + \delta u_i\delta u^i \cong$$
$$\cong (u_0+\delta u_0)(u^0+\delta u^0) = 1 \Rightarrow \quad (9.99)$$

$$u_0+\delta u_0 = \frac{1}{u^0+\delta u^0} = a(1-v^0) \quad (9.100)$$

$$\delta u_i = g_{i\mu}\delta u^\mu \cong a^2\eta_{i\mu}\delta u^\mu = -a^2\delta u^i = -a^2\frac{1}{a}v^i = -av^i \quad (9.101)$$

$$\boxed{u_0+\delta u_0 = a(1-v^0)} \quad (9.102)$$

$$\boxed{\delta u_i = -av_i} \quad (9.103)$$

__Компоненты ТЭИ__

Из (9.87)

$$T^\mu_\nu = (\rho+\delta\rho+p+\delta p)(u^\mu+\delta u^\mu)(u_\nu+\delta u_\nu) - \delta^\mu_\nu(p+\delta p) \Rightarrow \quad (9.104)$$

$$T^0_0 = (\rho+\delta\rho+p+\delta p)\frac{1}{a}(1+v_0)a(1-v_0) - \delta^0_0(p+\delta p) \cong$$
$$\cong \rho+\delta\rho \;\Rightarrow \quad (9.105)$$

$$\boxed{\delta T^0_0 = \delta\rho} \quad (9.106)$$

$$T^0_i = (\rho+\delta\rho+p+\delta p)\frac{1}{a}(1+v_0)(-av_i) - \delta^0_i(p+\delta p) \cong$$
$$\cong (\rho+p+\delta\rho+\delta p)(-v_i) \cong -(\rho+p)v_i \Rightarrow \quad (9.107)$$

$$\boxed{\delta T^0_i = -(\rho+p)v_i} \quad (9.108)$$

$$T^i_j = (\rho+\delta\rho+p+\delta p)\frac{1}{a}v^i(-av_j) - \delta^i_j(p+\delta p) \cong$$
$$\cong -\delta^i_j p - \delta^i_j\delta p \Rightarrow \quad (9.109)$$

$$\boxed{\delta T^i_j = -\delta^i_j\delta p} \quad (9.110)$$

Потребуются, когда будем выписывать линеаризованные уравнения для возмущений.

Разложение возмущений по спиральностям: скалярные, векторные, тензорные моды

Так как все уравнения пишутся в линейном порядке по возмущениям, то разные компоненты Фурье можно изучать отдельно:

$$h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3k\, e^{i\mathbf{kx}} h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{k}) \qquad (9.111)$$

и т.д. для $\delta\rho, \delta p, v_i$. Дифференцирование и умножение на ik для компонент Фурье взаимозаменяемы:

$$\partial_i \leftrightarrow ik_i \qquad (9.112)$$

Для фиксированной моды $\mathbf{k}$ пространство и $e^{i\mathbf{kx}}$ инвариантны относительно вращений вокруг вектора $\mathbf{k}$ – «малая группа $SO(2)$», но тензорные компоненты $h_{ik}, v_i, \delta\rho$ (вообще говоря) не инвариантны, преобразуются друг через друга $\Rightarrow$
моды с определенной спиральностью (3 типа).

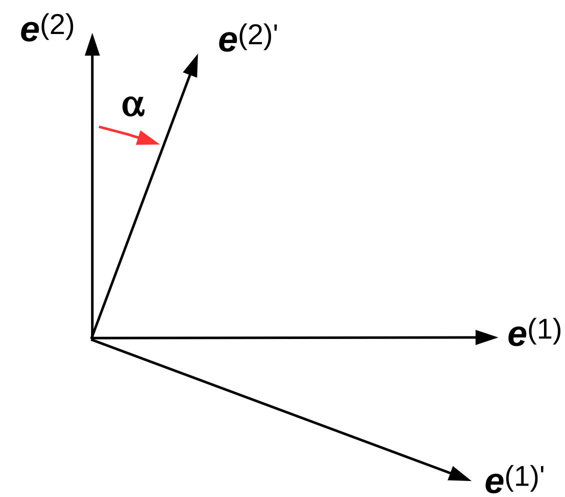
1. Скалярные моды (спиральность 0)

Объект при вращениях малой группы $SO(2)$ не преобразуется.
Типы скалярных мод (4 штуки)

- 3-скаляр $(\delta\rho, \delta p, \dots)$
- Вектор, $||\, \mathbf{k}$
- Тензор, $\propto k_i k_j$ (т.к. k_i, k_j не меняются)
- Тензор, $\propto \delta_{i,j}$

2. Векторные моды (спиральность 1)

Преобразуются как вектор, ортогональный $\mathbf{k}$



$\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{k}$ – правая тройка.
Поворот по Ч.С. на α

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)'} &= \mathbf{e}^{(1)} \cos\alpha - \mathbf{e}^{(2)} \sin\alpha \\ \mathbf{e}^{(2)'} &= \mathbf{e}^{(1)} \sin\alpha + \mathbf{e}^{(2)} \cos\alpha \end{aligned} \qquad (9.113)$$

$$\mathbf{e}^{\pm} = \mathbf{e}^{(1)} \pm i\mathbf{e}^{(2)} \qquad (9.114)$$

$$\mathbf{e}^{(+)'}(\alpha) = \mathbf{e}^{(1)'}(\alpha) + i\mathbf{e}^{(2)'}(\alpha) = e^{i\alpha}\mathbf{e}^{(+)} \qquad (9.115)$$

$$\hat{L}_\alpha \mathbf{e}^{(+)'}(\alpha) = -i\frac{\partial}{\partial\alpha}(e^{i\alpha}\mathbf{e}^{(+)}) = +1\mathbf{e}^{(+)'}(\alpha) \qquad (9.116)$$

– спиральность $+1$

$$\hat{L}_\alpha \mathbf{e}^{(-)'}(\alpha) = -1\mathbf{e}^{(-)'}(\alpha) \qquad (9.117)$$

– спиральность -1

Поизвольный поперечный вектор является смесью спиральностей -1 и $+1$:

$$\mathbf{S} = a_1\,\mathbf{e}^{(1)} + a_2\,\mathbf{e}^{(2)} = \alpha_-\,\mathbf{e}^{(-)} + \alpha_+\,\mathbf{e}^{(+)} \qquad (9.118)$$

Единичную спиральность имеют (2 типа)

- Поперечные векторы
- Тензоры со структурой $k_i W_j^T$, где W_j^T – поперечный вектор, то есть $k_i W_i^T = 0$

(скалярные моды имеют спиральность 0,
т.к. они не зависят от поворота α)

3. Тензорные моды (спиральность 2), всего 1 тип

Рассмотрим симметричные, бесследовые, поперечные 3-мерные тензоры:

- $h_{ij} = h_{ji}$ – 3 условия
- $h_{ii} = 0$ – 1 условие
- $k_i h_{ij} = 0$ – поперечность, 3 условия

9 параметров, 7 условий, 2 – свободные $\Rightarrow$
Размерность $= 2$
Из $\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}$ построим два тензора:

$$e_{ij}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)}e_j^{(1)} - e_i^{(2)}e_j^{(2)}) \qquad (9.119)$$

$$e_{ij}^{(\times)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)}e_j^{(2)} + e_i^{(2)}e_j^{(1)}) \qquad (9.120)$$

– линейно независимы, симметричны, бесследовы, поперечны по определению.

$$e_{ij}^{(\pm 2)} = e_{ij}^{(+)} \pm i e_{ij}^{(\times)} \qquad (9.121)$$

Элементарно проверяется:

$$e_{ij}^{(+2)\prime}(\alpha) = e^{+2i\alpha} e_{ij}^{(+2)\prime} \Rightarrow \hat{L}_\alpha e_{ij}^{(+2)\prime}(\alpha) = +2 e_{ij}^{(+2)\prime} \qquad (9.122)$$

$$e_{ij}^{(-2)\prime}(\alpha) = e^{-2i\alpha} e_{ij}^{(-2)\prime} \Rightarrow \hat{L}_\alpha e_{ij}^{(-2)\prime}(\alpha) = -2 e_{ij}^{(-2)\prime} \qquad (9.123)$$

– объекты со спиральностью ± 2.

• 4 типа скаляров (спиральность 0), 2 типа векторов (спиральность 1), 1 тип тезоров (спиральность 2) достаточно для разложения по ним всех величин, нужных для теории космологических возмущений (062следедующая лекция).

• Дифференцирование компонент Фурье по x_j эквивалентно умножению на ik_j, k_j не меняется при вращениях относительно $\mathbf{k}$, поэтому дифференцирование не меняет спиральности $\Rightarrow$

Линеаризованные (и потому линейные) уравнения для возмущений разбиваются на независимые компоненты для мод разной спиральности.

Моды разной спиральности эволюционируют существенно по-разному!