Лекция 3

Уравнения Эйнштейна, сохранение энергии-импульса, гравитационные волны, антигравитация. Космологический принцип.

Получение уравнений Эйнштейна из вариационного прицципа

Сначала одна гравитация – без материи.

Действие должно быть общековариантной величиной.

1. Простейшее действие

$$S_\Lambda = -\Lambda \int_\Omega d^4x\sqrt{-g} \tag{3.1}$$

$$\delta S_\Lambda = -\Lambda \int d^4x\delta(\sqrt{-g}) = \Lambda \int d^4x \frac{\delta g}{2\sqrt{-g}} \tag{3.2}$$

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}; \quad \delta g = ? \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned} &\det(\hat{g} + \delta\hat{g}) = \det[\hat{g}(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g})] = \\ &= \det\hat{g} \cdot \det(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g}) = g \cdot [1 + \mathrm{Tr}(\hat{g}^{-1}\delta\hat{g})] = \\ &= g(1 + g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = g + g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\delta g = g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{3.5}$$

$$\boxed{\delta S_\Lambda = -\frac{\Lambda}{2}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}} \tag{3.6}$$

2. Вклад $\sim \int d^4x\sqrt{-g}\, f(R)$

Хотим иметь уравнения не выше второго порядка для $g_{\mu\nu}$.

Проблема: R зависит от вторых производных g по x. Получим ли уравнения выше второго порядка?

Можно показать, что $f(R)$-гравитация сводится к R-гравитации плюс некоторое скалярное поле. Поэтому достаточно взять $f(R) = R$.

$$S_R = -K\int d^4x\sqrt{-g}R = -K\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{3.7}$$

$$\delta S_R = \begin{array}{l|l} -K\int d^4x\delta(\sqrt{-g})R & = \delta S_1 \\ -K\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} & = \delta S_2 \\ -K\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} & = \delta S_3 \end{array} \tag{3.8}$$

K – некоторая константа, пока неизвестна.

• Нужно привести интегралы к такому виду, чтобы под интегралом стояло $\delta g_{\mu\nu}$.

$$\boxed{\delta S_1 = -\frac{K}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\, R\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}} \tag{3.9}$$

$$\delta S_2 = -K\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{3.10}$$

$\delta g^{\mu\nu} = ?$

$$\delta(g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}) = 0 \;\Rightarrow\; g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} = -g_{\nu\lambda}\delta g^{\mu\nu}\;|g^{\rho\lambda} \tag{3.11}$$

$$\delta^\rho_\nu\delta g^{\mu\nu} = -g^{\rho\lambda}g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} \Rightarrow \tag{3.12}$$

$$\delta g^{\mu\rho} = -g^{\rho\lambda}\delta g_{\nu\lambda}g^{\mu\nu}\;|\;\rho\rightleftarrows\nu \tag{3.13}$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\delta g_{\rho\lambda} \tag{3.14}$$

$$\delta S_2 = +K\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\rho}g^{\nu\lambda}\delta g_{\rho\lambda} = \\ = +K\int d^4x\sqrt{-g}R^{\rho\lambda}\delta g_{\rho\lambda} \tag{3.15}$$

$$\boxed{\delta S_2 = +K\int d^4x\sqrt{-g}\,R^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}} \tag{3.16}$$

$$\delta S_3 = -K\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \tag{3.17}$$

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \tag{3.18}$$

$$\delta R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \\ + \delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \delta\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \tag{3.19}$$

$\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ – тензор, в отличие от $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$! (Почему? ★)

$$\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}) - \nabla_\rho(\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}) = \\ = \partial_\lambda(\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}) + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \\ - \partial_\rho(\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}) - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma} = \\ = \delta R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} \Rightarrow \tag{3.20}$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \tag{3.21}$$

$$\delta S_3 = -K\int d^4x\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] = \\ = -K\int d^4x\sqrt{-g}[\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] = \\ = -K\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}) = \\ = \Big\backslash\; \nabla_\lambda A^\lambda = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\lambda(\sqrt{-g}A^\lambda)\;★\;\Big\backslash = \\ = -K\int_\Omega d^4x\,\partial_\lambda[\sqrt{-g}\,(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma})] = 0 \tag{3.22}$$

– так как под интегралом полная дивергенция, а все вариации на границе исчезают.

$$\boxed{\delta S_3 = 0} \tag{3.23}$$

$$\partial_\alpha\left(\delta\Gamma^\delta_{\lambda\mu}\big|_\Omega\right) = \\ = \partial_\alpha\left(\frac{1}{2}g^{\delta\nu}(\partial_\lambda\delta g_{\mu\nu} + \partial_\mu\delta g_{\nu\lambda} - \partial_\nu\delta g_{\lambda\mu})\right)\Big|_\Omega = 0(?) \tag{3.24}$$

[Сложное] решение проблемы: arXiv:2209.05936

$$
\begin{aligned}
\delta S = \delta S_\Lambda + \delta S_R = & \\
& = -\frac{\Lambda}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
& - \frac{K}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}R\delta g_{\mu\nu} \\
& + K\int d^4x\sqrt{-g}R^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = \\
= \int d^4x\sqrt{-g}\left[K\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) - \frac{\Lambda}{2}g^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu} = 0 &
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}\Lambda g^{\mu\nu}} \tag{3.26}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}\Lambda g_{\mu\nu}} \tag{3.27}$$

K пока неизвестна!

Тензор Эйнштейна:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{3.28}$$

Поля материи, тензор энергии-импульса

$$S = S_\Lambda(g) + S_R(g) + S_m(u, g) \tag{3.29}$$

$$
\begin{aligned}
\delta S = \delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + & \\
+ \delta S_m(u, g)|_{\delta g} + \delta S_m(u, g)|_{\delta u} = 0 &
\end{aligned} \tag{3.30}
$$

Символически:

$$
\begin{aligned}
\delta S = \frac{\delta S_\Lambda(g)}{\delta g}\delta g + \frac{\delta S_R(g)}{\delta g}\delta g + & \\
+ \frac{\delta S_m(u, g)}{\delta g}\delta g + \frac{\delta S_m(u, g)}{\delta u}\delta u = 0 &
\end{aligned} \tag{3.31}
$$

Вариации $\delta g_{\mu\nu}$ и δu независимы! $\Rightarrow$

Уравнения гравитационного поля:

$$\delta S_\Lambda(g)|_{\delta g} + \delta S_R(g)|_{\delta g} + \delta S_m(u, g)|_{\delta g} = 0 \tag{3.32}$$

Уравнения полей материи:

$$\delta S_m(u, g)|_{\delta u} = 0 \tag{3.33}$$

Из вариации полного действия получаются и уравнения гравитационного поля, и уравнения полей материи!

$$S_m(u,g) = \int d^4x \sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m(u,g) \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
\delta S_m(u,g)|_{\delta g} &= \int d^4x\, \delta(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m) = \\
&= \int d^4x\, \frac{\delta(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}} \right] \delta g_{\mu\nu} \equiv \\
&\equiv \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\frac{1}{2} T^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_m)}{\delta g_{\mu\nu}} \tag{3.36}$$

$T_{\mu\nu}$ – метрический тензор энергии-импульса полей материи (*симметричен по определению!*).

Откуда берется такое определение?

Пример. Скалярное поле

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\phi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\phi) \tag{3.37}$$

$\mathcal{L}$ не зависит от производных $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$.

$$\begin{aligned}
\delta S_m|_{\delta g} &= \int d^4x\, \delta(\sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m) = \\
&= \int d^4x \left[\delta(\sqrt{-g})\mathcal{L} + \sqrt{-g}\delta\mathcal{L} \right] = \\
&= \int d^4x \left[\frac{1}{2}\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sqrt{-g} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \right] = \\
&= \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \right] \delta g_{\mu\nu} \;\Rightarrow
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$T^{\mu\nu} = -2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{3.39}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = ? \quad \delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \tag{3.40}$$

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu} \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi = -\frac{1}{2} g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\sigma} g^{\sigma\nu} \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi = \\
&= -\frac{1}{2}\partial^\rho\varphi\partial^\sigma\varphi\, \delta g_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi\, \delta g_{\mu\nu} \;\Rightarrow
\end{aligned} \tag{3.41}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi \;\Rightarrow \tag{3.42}$$

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{3.43}$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\mathcal{L} \tag{3.44}$$

– обычное выражение тензора энергии-импульса скалярного поля, следующее из теоремы Нетер ★.

Замечание

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\phi) = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi - V(\phi) \quad (3.45)$$

$$\delta\mathcal{L}|_g \neq \frac{1}{2}\delta g_{\mu\nu}\partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi, \text{ так как } \partial^\mu\varphi = g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi \quad (3.46)$$

Уравнения гравитационного поля с учетом материи

$$\delta S|_{\delta g} = \delta S_\Lambda|_{\delta g} + \delta S_R|_{\delta g} + \delta S_m|_{\delta g} =$$
$$= \int d^4x\sqrt{-g}\left[K\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) - \frac{\Lambda}{2}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\right]\delta g_{\mu\nu} = 0 \quad (3.47)$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \quad (3.48)$$

$$K = ?$$

Найдем константу $\frac{1}{2K}$ из нерелятивистского предела

Общее уравнение геодезической:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = 0 \quad (3.49)$$

$$\tau = s, \ u^\mu(s) = \frac{dx^\mu(s)}{ds} \quad (3.50)$$

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \quad (3.51)$$

Статический нерелятивистский предел движения частицы:

$$\frac{dx^0}{ds} \approx 1, \ \frac{dx^i}{ds} \ll \frac{dx^0}{ds} \ \Rightarrow \ \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{00} = 0 \quad (3.52)$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (3.53)$$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\eta^{i\sigma}(\partial_0 h_{0\sigma} + \partial_0 h_{\sigma 0} - \partial_\sigma h_{00}) =$$
$$= \frac{1}{2}\eta^{ii}(\partial_0 h_{0i} + \partial_0 h_{i0} - \partial_i h_{00}) = +\frac{1}{2}\partial_i h_{00} \quad (3.54)$$

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\frac{1}{2}\partial_i h_{00} \cong \frac{d^2x^i}{dt^2} = -\partial_i\varphi \quad (3.55)$$

φ - грав. потенциал $\Rightarrow$

$$h_{00} = 2\varphi \quad (3.56)$$

$$g_{00} = 1 + h_{00} = 1 + 2\varphi \quad (3.57)$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\Delta g_{00} \quad (3.58)$$

Уравнение Пуассона для грав. потенциала:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \quad (3.59)$$

Из (3.58):

$$\Delta g_{00} = 8\pi G\rho \quad (3.60)$$

Уравнение Эйнштейна без Λ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}T_{\mu\nu} \ | \ g^{\mu\nu} \quad (3.61)$$

$$R - \frac{1}{2}4R = \frac{1}{2K}T, \quad T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \;\Rightarrow \tag{3.62}$$

$$R = -\frac{1}{2K}T \;\Rightarrow \tag{3.63}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \frac{1}{2K}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)} \tag{3.64}$$

Статический нерелятивистский предел:

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(\rho, 0, 0, 0) \tag{3.65}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2K}\left(\rho - \frac{1}{2}\rho\right) = \frac{1}{4K}\rho \tag{3.66}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \tag{3.67}$$

$\Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\nu\lambda}$ – второй порядок малости

$$R_{00} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{00} - \partial_0 \Gamma^\lambda_{\lambda 0} = \backslash\text{статика}\backslash = \partial_i \Gamma^i_{00} \tag{3.68}$$

$$R_{00} = \partial_i\left(\frac{1}{2}\partial_i h_{00}\right) = \frac{1}{2}\partial_i\partial_i g_{00} = \frac{1}{2}\Delta g_{00} \tag{3.69}$$

Подставляем в (3.66):

$$\Delta g_{00} = \frac{1}{2K}\rho \tag{3.70}$$

Сравнивая с (3.60):

$$\boxed{\frac{1}{2K} = 8\pi G} \tag{3.71}$$

Уравнение Эйнштейна с Λ-членом:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \tag{3.72}$$

Из уравнения Эйнштейна следует ковариантный закон сохранения энергии-импульса:

$$\nabla^\mu \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\nu \tag{3.73}$$

$$\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = 8\pi G(0 + \nabla^\mu T_{\mu\nu}) \tag{3.74}$$

$$\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) \equiv 0 \;\Rightarrow\; \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{3.75}$$

<u>Доказательство.</u>

Тождество Бьянки:

$$\nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu} = 0 \tag{3.76}$$

Сворачиваем по λ, μ:

$$\nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\lambda\nu} + \nabla_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\lambda} = 0 \tag{3.77}$$

$$\nabla_\rho R_{\sigma\nu} + \nabla_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} - \nabla_\nu R_{\sigma\rho} = 0 \mid g^{\sigma\rho} \tag{3.78}$$

$$\nabla^\rho R_{\rho\nu} + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} - \nabla_\nu R = 0 \;\bigstar \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}\nabla^\rho R_{\rho\nu} + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} - \nabla^\mu(g_{\mu\nu}R) &= \\ = 2\nabla^\mu R_{\mu\nu} - \nabla^\mu(g_{\mu\nu}R) &= \\ = 2\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) &= 0\end{aligned} \tag{3.80}$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) \tag{3.81}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.82}$$

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) \ = \ 0 \ \Rightarrow \tag{3.83}$$

$$R^{\sigma}{}_{\mu\nu\lambda}(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) \ = \ 0 \tag{3.84}$$

Всё Γ и всё R – это возмущения над нулевыми значениями за счет возмущения $h_{\mu\nu}$
$\Rightarrow$ можно использовать формулы первого порядка для возмущений:

$$R^{\mu}{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} - \partial_\rho \Gamma^{\mu}_{\lambda\nu} \tag{3.85}$$

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \Gamma^{\mu}_{\rho\nu} = \partial_\lambda \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} (\partial_\rho h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\sigma\rho} - \partial_\sigma h_{\rho\nu}) = \\ = \frac{1}{2} (\partial_\lambda \partial_\rho h^{\mu}_{\nu} + \partial_\lambda \partial_\nu h^{\mu}_{\rho} - \partial_\lambda \partial^{\mu} h_{\rho\nu}) \end{aligned} \tag{3.86}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial^\lambda \partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial^\lambda \partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu h^{\lambda}_{\lambda}) \bigstar \tag{3.87}$$

При малом преобразовании $x'^{\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)$ $\bigstar$:

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \partial^\mu \xi^\nu + \partial^\nu \xi^\mu \Rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \tag{3.88}$$

$R_{\mu\nu}$ калибровочно инвариантно относительно преобразования:

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \text{ (проверить } \bigstar) \tag{3.89}$$

Гармоническая калибровка:

$$\partial_\mu h^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} \partial_\nu h^{\lambda}_{\lambda} = 0 \tag{3.90}$$

обеспечена, если

$$\partial_\mu \partial^\mu \xi_\nu = - \left(\partial_\mu h^{\mu}_{\nu} - \frac{1}{2} h^{\lambda}_{\lambda} \right) \tag{3.91}$$

Тогда, из (3.87) $\bigstar$:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \partial^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\partial_0^2 - \Delta) h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \Box h_{\mu\nu} \ \Rightarrow \tag{3.92}$$

$$\boxed{\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} T \right)} \tag{3.93}$$

Гравитационные волны

Если $T_{\mu\nu} = 0$, то

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{3.94}$$

– волновое уравнение, грав. волны в вакууме.

Замечание: если $G = 0$, то грав. волны все равно есть.

Макроскопический феноменологический тензор энергии-импульса изотропной «жидкости»

1. Покоящееся вещество («идеальная жидкость») в пространстве Минковского (≈ тензор напряжений):

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix} \tag{3.95}$$

$$u^{\mu} = (1, 0, 0, 0) \tag{3.96}$$

2. Вещество движется в пространстве Минковского:

$$(p+\rho)u^{\mu}u^{\nu} - p\eta^{\mu\nu} - \underline{\text{это тензор}} \tag{3.97}$$

В системе покоя материи:

$$(p+\rho)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - p\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} \tag{3.98}$$

<u>Следовательно</u>, в произвольной движущейся системе:

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^{\mu}u^{\nu} - p\eta^{\mu\nu} \tag{3.99}$$

3. Вещество в произвольной системе.
В локально-Лоренцевой системе должно быть:

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^{\mu}u^{\nu} - p\eta^{\mu\nu} \tag{3.100}$$

Тогда общековариантный тензор ЭИ:

$$\boxed{T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^{\mu}u^{\nu} - pg^{\mu\nu}} \tag{3.101}$$

Статическое изотропное вещество как источник гравитации (и антигравитации)

$$\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right) \tag{3.102}$$

Для компоненты 00: \$T = \rho - 3p$\

$$\partial_0^2 h_{00} - \Delta h_{00} = -8\pi G(\rho+3p) \;\Rightarrow \tag{3.103}$$

$$\Delta h_{00} = 8\pi G(\rho+3p) \tag{3.104}$$

В нерелятивистской статике (см. (3.58)):

$$\Delta h_{00} = 2\Delta\varphi \;\Rightarrow \tag{3.105}$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G(\rho+3p) \tag{3.106}$$

Источником гравитации является не ρ, а $\rho+3p$.
Если $\rho<0,\ p=0 \;\Rightarrow$ антигравитация.
Если $\rho+3p<0 \;\Rightarrow$ тоже антигравитация, даже если $\rho>0$!

<u>Λ-член</u>

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \tag{3.107}$$

$$T^{(\Lambda)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda & & & \\ & -\Lambda & & \\ & & -\Lambda & \\ & & & -\Lambda \end{pmatrix} \tag{3.108}$$

$\rho=\Lambda$, $p=-\Lambda$, уравнение состояния: $p=-\rho$.
Если $\Lambda>0$, то $\rho+3p=-2\Lambda<0$.
Космологическая константа $\Lambda>0$ приводит к антигравитации.

Классическая космология: космологический принцип и смысл однородности и изотропии

• Предполагаем, что Вселенная заполнена идеальной (без вязкости, многокомпонентной) *космологической жидкостью*
В сопутствующей системе

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} = \sum_i \hat{T}_i \qquad (3.109)$$

• *Космологический принцип:* Вселенная изотропна и однородна: космологическая жидкость однородна и геометрия однородна (кривизна одинакова).

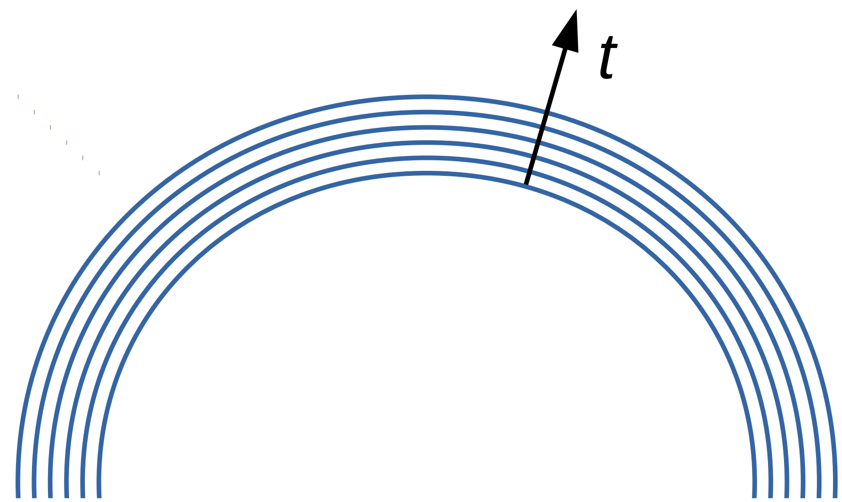
Смысл однородности.

• Multifinger time – многонаправленное время – набор пространственно-подобных поверхностей, перенумерованных параметром t.

• Через каждое событие проходит гиперповерхность изоторпии – точный смысл однородности.

• Изотропия на пространственной гиперповерхности влечет однородность на той же поверхности.
Доказательство: Если бы не было однородности, на поверхности возникли бы градиенты, нарушающие изотропию.

• На гиперповерхностях однородности космологическая жидкость должна покоиться (иначе – анизотропия). $\Rightarrow$
Если все пространство-время разложено на систему поверхностей однородности, то оно имеет естественную сопутствующую космологическую систему отсчета, связанную с покоящейся космологической жидкостью.



Дополнительное чтение: Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер. Гравитация, Т.2., §27.2 – §27.5.

Космологический принцип и наблюдение:

Однородность является обобщением результатов наблюдений, но Вселенная не стационарна, поэтому прямо однородность наблюдать невозможно!

На больших расстояниях наблюдается плотность материи, температура и т.д. отличные от локальных современных.