

## Лекция 2

Основы ОТО. II. Закон преобразования аффинных связностей, локально-лоренцевы системы отсчета и геодезические. Тензор кривизны.

## Закон преобразования аффинных связностей

$$\nabla_{\lambda} A^{\mu} = \partial_{\lambda} A^{\mu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} A^{\nu} - \text{Должно быть тензором!} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} (\nabla_{\lambda} A^{\mu})' &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} (\nabla_{\alpha} A^{\beta}) = \\ &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} (\partial_{\alpha} A^{\beta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} A^{\gamma}) = \\ &= \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial A^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\beta} A^{\gamma} \quad (2.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\partial_{\lambda} A^{\mu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu} A^{\nu})' &= \frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} + \Gamma'_{\lambda\gamma}{}^{\mu} A'^{\gamma} = \\ &= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} A^{\alpha} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma'_{\lambda\gamma}{}^{\mu} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\delta}} A^{\delta} \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$\Gamma'_{\alpha\gamma}{}^{\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} A^{\gamma} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\alpha}} A^{\alpha} + \Gamma'_{\lambda\gamma}{}^{\mu} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\delta}} A^{\delta} \quad (2.4)$$

$$A^{\gamma}, A^{\alpha}, A^{\delta} \rightarrow A^{\varepsilon}$$

$$\Gamma'_{\alpha\varepsilon}{}^{\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}} + \Gamma'_{\lambda\gamma}{}^{\mu} \frac{\partial x'^{\gamma}}{\partial x^{\varepsilon}} \left| \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \right. \quad (2.5)$$

$$\Gamma'_{\lambda\delta}{}^{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \Gamma_{\alpha\varepsilon}^{\beta} - \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu} \partial x'^{\lambda}} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\varepsilon}} \equiv 0 \quad \star \quad (2.7)$$

$$\Gamma'_{\lambda\delta}{}^{\mu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\varepsilon}}{\partial x'^{\delta}} \Gamma_{\alpha\varepsilon}^{\beta} + \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} \frac{\partial^2 x^{\sigma}}{\partial x'^{\delta} \partial x'^{\lambda}} \quad (2.8)$$

Аффинная связность – не тензор!

---

### Кручение

$$C_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} - \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \quad (2.9)$$

Преобразуется как тензор!

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} \Leftrightarrow C_{\beta\gamma}^{\alpha} = 0 \quad (2.10)$$


---

## Локально Лоренцевы системы отсчета и отсутствие кручения

В пространстве Минковского:

1. Метрический тензор имеет вид  
 $g = \{1, -1, -1, -1\}$
2. Все  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0$

Если преобразованием координат можно добиться выполнения этих условий в точке, то система отсчета называется локально-Лоренцевой в этой точке.

Если  $C_{\beta\gamma}^\alpha = 0$  хотя бы в одной системе отсчета, то  $C_{\beta\gamma}^\alpha = 0$  во всех системах отсчета  $\Rightarrow$

Если  $C_{\beta\gamma}^\alpha \neq 0$  хотя бы в одной системе отсчета, то  $C_{\beta\gamma}^\alpha \neq 0$  в любой системе отсчета, следовательно в любой системе отсчета  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \neq 0$  и гравитацию локально исключить невозможно.

Чтобы гравитацию *можно было* локально исключить, в ОТО *необходимо*  $C_{\beta\gamma}^\alpha \equiv 0$ ,  $\Rightarrow \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha$  — это следует из физики!

### Замечание

- На самом деле даже в отсутствии кручения принцип эквивалентности для частиц со спином не выполняется (?), поэтому гравитацию исключить невозможно даже локально, принцип эквивалентности (во всех формах) неверен  $\Rightarrow$
- Нет оснований требовать отсутствия кручения  $\Rightarrow$
- Теории гравитации с кручением (теории Эйнштейна-Картана).

$C_{\beta\gamma}^\alpha = 0$  является *достаточным* условием, чтобы было возможно локально занулить аффинную связность.

$$x'^\mu = x^\mu + T_{\sigma\rho}^\mu x^\sigma x^\rho \quad (2.11)$$

$$\left. \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right|_0 = \delta_\nu^\mu; \quad \left. \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right|_0 = \delta_\mu^\nu \quad (2.12)$$

$$\left. \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} \right|_0 = T_{\varepsilon\beta}^\mu + T_{\beta\varepsilon}^\mu \Rightarrow \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\delta}^{\prime\mu} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta} \Gamma_{\alpha\varepsilon}^\beta - \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\varepsilon}{\partial x'^\delta} \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\varepsilon} = \\ &= \delta_\lambda^\alpha \delta_\beta^\mu \delta_\delta^\varepsilon \Gamma_{\alpha\varepsilon}^\beta - \delta_\lambda^\beta \delta_\delta^\varepsilon (T_{\varepsilon\beta}^\mu + T_{\beta\varepsilon}^\mu) = \\ &= \Gamma_{\lambda\delta}^\mu - (T_{\delta\lambda}^\mu + T_{\lambda\delta}^\mu) \quad (2.14) \end{aligned}$$

$$T_{\delta\lambda}^\mu + T_{\lambda\delta}^\mu = \Gamma_{\lambda\delta}^\mu(0) \Rightarrow \Gamma_{\lambda\delta}^{\prime\mu}(0) = 0. \quad (2.15)$$

Чтобы подобрать  $T_{\delta\lambda}^\mu$  достаточно, чтобы  $\Gamma_{\delta\lambda}^\mu = \Gamma_{\lambda\delta}^\mu$ . Тогда:

$$T_{\delta\lambda}^\mu = T_{\lambda\delta}^\mu = \frac{1}{2} \Gamma_{\delta\lambda}^\mu \quad (2.16)$$

С помощью преобразования

$$\hat{g}' = \hat{J} \hat{g} \hat{J}^T, \quad \hat{J} = \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right), \quad x^\mu = J_\nu^\mu x'^\nu \quad (2.17)$$

симметричная матрица  $\hat{g}$  может быть приведена к диагональному виду

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} k^0 & & & 0 \\ & -k^1 & & \\ & & -k^2 & \\ 0 & & & -k^3 \end{pmatrix}, \quad k^\mu > 0 \quad (2.18)$$

С помощью масштабного преобразования:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} \frac{1}{\sqrt{k^{\mu}}} \Rightarrow g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \hat{g} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Преобразование (2.11) в силу (2.12) не меняет тензоры в начале координат, поэтому связность можно занулить после того, как как  $\hat{g}$  приведен к лоренцову виду.

Метрический тензор можно привести к Лоренцеву виду и связность можно занулить одновременно – это локально Лоренцева система отсчета

Однако производные  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ , вообще говоря, не исчезают!

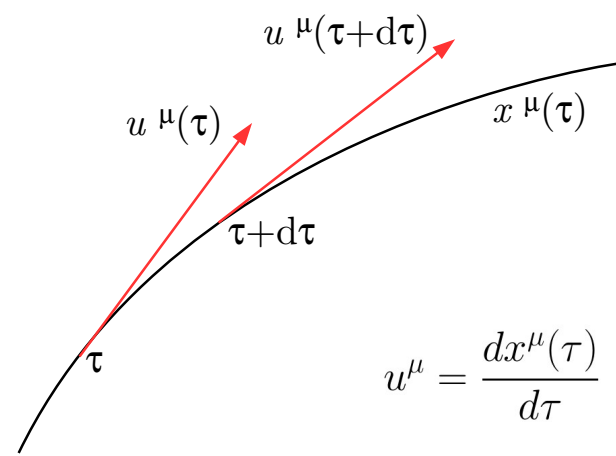
В частности, из-за этого неустранимы приливные силы.

Вывод:

Для того, чтобы можно было ввести локально лоренцевы системы отсчета необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты связности были симметричны  $\Rightarrow$

*Первое дополнительное условие ОТО на коэффициенты связности: симметричность*

## Геодезические



Геодезическая линия – такая кривая, вдоль которой касательный вектор к ней переносится параллельно самому себе.

$$u^{\mu}(\tau + d\tau) = u^{\mu} + \frac{du^{\mu}(\tau)}{d\tau}d\tau \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} u^{\mu}(\tau + d\tau) &= \tilde{u}^{\mu}(\tau + d\tau) = u^{\mu}(\tau) - \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}u^{\nu}(\tau)dx^{\lambda} = \\ &= u^{\mu}(\tau) - \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}u^{\nu}(\tau)u^{\lambda}(\tau)d\tau \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\frac{du^{\mu}}{d\tau}d\tau = -\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}u^{\nu}(\tau)u^{\lambda}(\tau)d\tau \Rightarrow \quad (2.22)$$

$$\boxed{\frac{du^{\mu}}{d\tau} + \Gamma_{\nu\lambda}^{\mu}u^{\nu}u^{\lambda} = 0} \quad (2.23)$$

Меняем местами  $\nu$  и  $\lambda$  и складываем:

$$\frac{du^{\mu}}{d\tau} + \frac{1}{2}(\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} + \Gamma_{\lambda\nu}^{\mu})u^{\nu}u^{\lambda} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\{\nu\lambda\}}^\mu u^\nu u^\lambda = 0 \quad (2.25)$$

$$\Gamma_{\{\nu\lambda\}}^\mu = \frac{1}{2} (\Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu) \quad (2.26)$$

Геодезические определяются симметризованными коэффициентами связности – геодезические линии не чувствуют кручение, даже если оно есть.

Другая форма уравнения геодезической:

$$\boxed{\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0} \quad (2.27)$$

Если частицы движутся по геодезическим, то в теории с кручением и без кручения они движутся одинаково!

Движение частиц в гравитационном поле по геодезическим – постулат, который не имеет доказательства.

*Первая проблема ОТО со спином:* частицы со спином не движутся по геодезическим (?).

*Вторая проблема ОТО со спином:* нет рецепта расчета гравитационного поля спина.

Система спинов может создавать макроскопический момент и должна приводить к макроскопическому гравитационному полю, которое ОТО не может считать  $\Rightarrow$

ОТО неполная макроскопическая теория гравитации.

Попытка учета поля спинов приводит к теориям Эйнштейна-Картана, в которых кручение не равно нулю.

## Второе дополнительное условие на коэффициенты связности: метричность

Хотим, чтобы операции поднятия/опускания индексов была универсальной:

$$g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \nabla_\lambda A_\mu; \quad A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu \text{ т.е.} \quad (2.28)$$

$$g_{\mu\nu}(\nabla_\lambda A^\nu) = \nabla_\lambda (g_{\mu\nu} A^\nu) \quad (2.29)$$

По правилу Лейбница:

$$\begin{aligned} \nabla_\lambda (g_{\mu\nu} A^\nu) &= (\nabla_\lambda g_{\mu\nu}) A^\nu + g_{\mu\nu} (\nabla_\lambda A^\nu) = \\ &= g_{\mu\nu} (\nabla_\lambda A^\nu) \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\boxed{\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0} \quad (2.31)$$

Метрический тензор ковариантно постоянен – *условие метричности связности (связность совместима с метрикой).*

Метричность связности априори ниоткуда не следует  $\rightarrow$

рассматриваются обобщения ОТО, в которых связность не метрична.

## Явное выражение коэффициентов связности через метрический тензор

Используются оба дополнительных условия *одновременно*: метричность  $g_{\mu\nu}$  и симметричность связности:

$$\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \partial_\lambda g_{\mu\nu} - \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} - \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} = 0. \quad (2.32)$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} \quad (2.33)$$

40 линейных уравнений с 40 неизвестными  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  ★

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} + \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma g_{\mu\sigma} &= \partial_\lambda g_{\mu\nu} \quad [\lambda\mu\nu] \quad | \times (+1) \\ \Gamma_{\mu\nu}^\sigma g_{\sigma\lambda} + \Gamma_{\mu\lambda}^\sigma g_{\nu\sigma} &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} \quad [\mu\nu\lambda] \quad | \times (+1) \\ \Gamma_{\nu\lambda}^\sigma g_{\sigma\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^\sigma g_{\lambda\sigma} &= \partial_\nu g_{\lambda\mu} \quad [\nu\lambda\mu] \quad | \times (-1) \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$2\Gamma_{\lambda\mu}^\sigma g_{\sigma\nu} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\lambda g_{\lambda\mu} \quad | g^{\nu\delta} \quad \star \quad (2.35)$$

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\delta = \frac{1}{2} g^{\delta\nu} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) \quad (2.36)$$

Для того, чтобы  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$  выражались через  $g_{\mu\nu}$ , метричность и симметричность связности необходимы!

Можно посчитать, что метричность+симметричность вместе дают 64 уравнения, однозначно определяющие все 64 компоненты связности ★.

Если в некоторой точке все  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = 0$ , то все  $\partial_\alpha g_{\beta\gamma} = 0$  ★.

Выражение (2.36) иногда называется символами Кристоффеля и обозначается

$$\left\{ \begin{matrix} \delta \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\delta\nu} (\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}) \quad (2.37)$$

**Уравнение геодезической из принципа максимума длины мировой линии или из принципа наименьшего действия**

$\delta S = 0$  – принцип действия для свободной частицы

$$\begin{aligned} S &= -m \int_a^b ds = -m \int_a^b \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \backslash x = x(\tau) \backslash = \\ &= -m \int_{\tau_a}^{\tau_b} \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\tau \quad (2.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta S &= -m \int \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \delta(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) d\tau = \\ &= -\frac{m}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha}} \left( \partial_\sigma g_{\mu\nu} \delta x^\sigma \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \frac{d\delta x^\nu}{d\tau} \right) d\tau = \\ &= \backslash \sigma \leftrightarrow \nu \text{ в первом слагаемом, по частям второе слагаемое} \backslash = \\ &= -\frac{m}{2} \int \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_\alpha \dot{x}^\alpha}} \left[ \partial_\nu g_{\mu\sigma} \dot{x}^\mu \dot{x}^\sigma - 2 \frac{d(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu)}{d\tau} \right] \delta x^\nu d\tau = \\ &= 0 \Rightarrow (2.39) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{d\tau}(g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu) - \frac{1}{2}\partial_\nu g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\sigma = 0 \quad (2.40)$$

$$\dot{x}^\mu \frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau} + g_{\mu\nu}\ddot{x}^\mu - \frac{1}{2}\partial_\nu g_{\mu\sigma}\dot{x}^\mu\dot{x}^\sigma = 0 \quad |g^{\nu\rho} \quad (2.41)$$

$$\frac{dg_{\mu\nu}}{d\tau} = \partial_\sigma g_{\mu\nu}\dot{x}^\sigma \quad (2.42)$$

$$\ddot{x}^\rho + g^{\rho\nu} \left( \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\nu g_{\mu\sigma} \right) \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu = 0 \quad (2.43)$$

$$\partial_\sigma g_{\mu\nu}\dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu = \frac{1}{2}(\partial_\sigma g_{\mu\nu}\dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu + \partial_\mu g_{\sigma\mu}\dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu) \quad (2.44)$$

$$\ddot{x}^\rho + \frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma})\dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu = 0 \quad (2.45)$$

$$\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\sigma g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\sigma\nu} - \partial_\nu g_{\mu\sigma}) = \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \quad (2.46)$$

$$\boxed{\ddot{x}^\rho + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \dot{x}^\sigma \dot{x}^\mu = 0} \quad (2.47)$$

$$\boxed{\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\sigma\mu}^\rho \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau} = 0} \quad (2.48)$$

## Тензор Леви-Чевита

Хотим, чтобы  $E^{\mu\nu\rho\sigma}$  был тензором, и в локально лоренцевой (галилеевой) системе ( $x$ )

$$E^{\mu\nu\rho\sigma} = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad \varepsilon^{0123} = 1 \quad (2.49)$$

Как будет в произвольной системе ( $x'$ )?

$$E'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\delta} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.50)$$

$$\left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| = \sqrt{\frac{g'}{g}} = \sqrt{-g'} \Rightarrow \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \Rightarrow \quad (2.51)$$

$$E'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g'}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.52)$$

$$\boxed{E^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}} \quad (2.53)$$

Аналогично можно найти ★:

$$\boxed{E_{\mu\nu\rho\sigma} = \sqrt{-g} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}} \quad (2.54)$$

## Тензор кривизны

Два способа ввести тензор кривизны.

1. Через коммутатор ковариантной производной  $[\nabla_\mu, \nabla_\nu]$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi = \partial_\mu \partial_\nu \varphi - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \varphi \quad (2.55)$$

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \varphi = \partial_\nu \partial_\mu \varphi - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda \partial_\lambda \varphi \Rightarrow \quad (2.56)$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] \varphi = -(\Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda) \partial_\lambda \varphi = -C_{\mu\nu}^\lambda \partial_\lambda \varphi = 0 \quad (2.57)$$

$$\nabla_\mu \nabla_\nu A^\lambda - \nabla_\nu \nabla_\mu A^\lambda = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda =? \quad (2.58)$$

$$\nabla_\mu (\nabla_\nu A^\lambda) = \partial_\mu (\nabla_\nu A^\lambda) - \Gamma_{\mu\nu}^\sigma (\nabla_\sigma A^\lambda) + \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda (\nabla_\nu A^\sigma) = \dots \quad (2.59)$$

$$\nabla_\nu (\nabla_\mu A^\lambda) = \dots \quad (2.60)$$

(посчитать! ★)

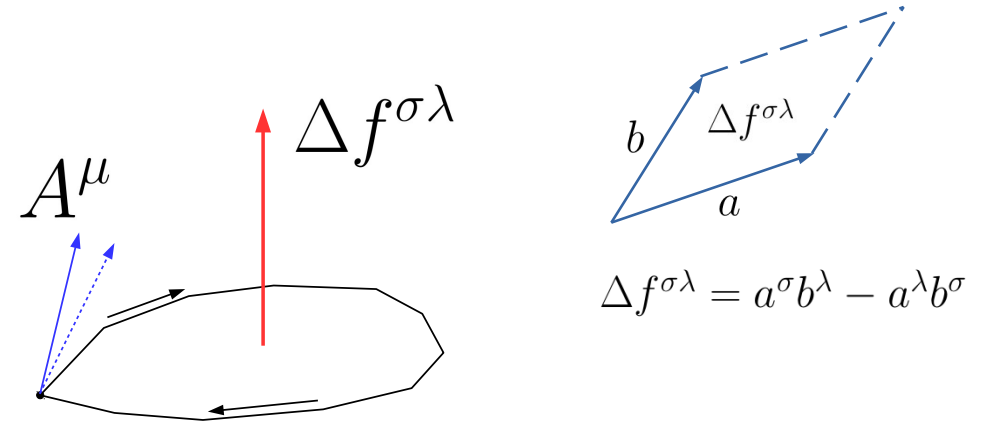
$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A^\lambda = A^\sigma R_{\sigma\mu\nu}^\lambda \quad (2.61)$$

$$R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \quad (2.62)$$

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] A_\lambda = A_\sigma R_{\mu\nu\lambda}^\sigma \quad (\text{посчитать } \star) \quad (2.63)$$

Отсюда видно, почему тензор кривизны – действительно тензор.

2. Параллельный перенос вдоль замкнутого контура



$$\tilde{A}^\mu(x + dx) = A^\mu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \quad (2.64)$$

$$\delta A^\mu(x) = \tilde{A}^\mu(x + dx) - A^\mu(x) = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \quad (2.65)$$

$$\Delta A^\mu = \oint \delta A^\mu(x) = -\oint \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \quad (2.66)$$

Формула Стокса:

$$\oint B_{\dots\lambda} dx^\lambda = \frac{1}{2} \int df^{\sigma\lambda} (\partial_\sigma B_{\dots\lambda} - \partial_\lambda B_{\dots\sigma}) \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \Delta A^\mu &= -\frac{1}{2} \int df^{\sigma\lambda} [\partial_\sigma (\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu) - \partial_\lambda (\Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu)] \simeq \\ &\simeq -\frac{1}{2} \Delta f^{\sigma\lambda} (\partial_\sigma \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \partial_\sigma A^\nu - \partial_\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu - \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \partial_\lambda A^\nu) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Внутри контура  $A^\mu$  изменяется только за счет параллельного переноса, поэтому

$$\delta A^\mu(x) = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu dx^\lambda \Rightarrow \partial_\lambda A^\mu = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu \quad (2.69)$$



$$\begin{aligned}
\Delta A^\mu &= \\
-\frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\sigma\Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu\Gamma_{\rho\sigma}^\nu A^\rho - \partial_\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu\Gamma_{\rho\lambda}^\nu A^\rho) &= \\
= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}(\partial_\lambda\Gamma_{\sigma\nu}^\mu - \partial_\sigma\Gamma_{\lambda\nu}^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\sigma\rho}^\mu\Gamma_{\nu\lambda}^\rho)A^\nu &= \\
= \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}R_{\sigma\lambda\nu}^\mu A^\nu & \quad (2.70)
\end{aligned}$$

$$\Delta A^\mu = \frac{1}{2}\Delta f^{\sigma\lambda}R_{\sigma\lambda\nu}^\mu A^\nu \quad (2.71)$$

Из вывода видно, что формула верна универсально, независимо от метричности и симметричности связности.

## Свойства тензора кривизны

$$R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = \partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned}
R_{\tau\sigma\mu\nu} &= g_{\tau\lambda}R_{\sigma\mu\nu}^\lambda = \\
&= g_{\tau\lambda}(\partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho) \quad (2.73)
\end{aligned}$$

$$1. \quad R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\tau\sigma\nu\mu} \quad \text{— очевидно} \quad (2.74)$$

$$2. \quad R_{\tau\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\tau\mu\nu} \quad (2.75)$$

— не очевидно, использует метричность и симметричность, не универсально

$$\Gamma_{\xi,\nu\sigma} = g_{\xi\lambda}\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda = \frac{1}{2}(\partial_\nu g_{\sigma\xi} + \partial_\sigma g_{\xi\nu} - \partial_\xi g_{\nu\sigma}) \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned}
R_{\tau\sigma\mu\nu} &= +g_{\tau\lambda}(\partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\rho) \quad (2.77) \\
&\quad -g_{\tau\lambda}(\partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho)
\end{aligned}$$

$\nu\sigma \equiv ..$

$$\begin{aligned}
g_{\tau\lambda}(\partial_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\nu\sigma}^\rho) &= g_{\tau\lambda}\nabla_\mu\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda = \nabla_\mu(g_{\tau\lambda}\Gamma_{\nu\sigma}^\lambda) = \\
&= \nabla_\mu(\Gamma_{\tau,\nu\sigma}) = \partial_\mu\Gamma_{\tau,\nu\sigma} - \Gamma_{\tau\mu}^\lambda\Gamma_{\lambda,\nu\sigma} = \\
&= \partial_\mu\Gamma_{\tau,\nu\sigma} - g^{\lambda\xi}\Gamma_{\xi,\tau\mu}\Gamma_{\lambda,\nu\sigma} \quad (2.78)
\end{aligned}$$

$$g_{\tau\lambda}(\partial_\nu\Gamma_{\mu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\sigma}^\rho) = \partial_\nu\Gamma_{\tau,\mu\sigma} - g^{\lambda\xi}\Gamma_{\xi,\tau\nu}\Gamma_{\lambda,\mu\sigma} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned}
R_{\tau\sigma\mu\nu} &= \partial_\mu\Gamma_{\tau,\nu\sigma} - \partial_\nu\Gamma_{\tau,\mu\sigma} + g^{\lambda\xi}(\Gamma_{\xi,\mu\sigma}\Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma}\Gamma_{\lambda,\mu\tau}) = \\
&= \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\sigma g_{\tau\nu} - \partial_\mu\partial_\tau g_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma g_{\tau\mu} + \partial_\nu\partial_\tau g_{\mu\sigma}) + \\
&\quad + g^{\lambda\xi}(\Gamma_{\xi,\mu\sigma}\Gamma_{\lambda,\nu\tau} - \Gamma_{\xi,\nu\sigma}\Gamma_{\lambda,\mu\tau}) \quad (2.80)
\end{aligned}$$

Отсюда свойство (2.75) уже очевидно.

3.

$$R_{\tau\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\tau\sigma} \star \quad (2.81)$$

4.

$$R^\sigma_{\rho\mu\nu} + R^\sigma_{\mu\nu\rho} + R^\sigma_{\nu\rho\mu} = 0 \quad (2.82)$$

Из тождества Якоби:

$$[\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\varphi + [\nabla_\mu, [\nabla_\nu, \nabla_\rho]]\varphi + [\nabla_\nu, [\nabla_\rho, \nabla_\mu]]\varphi = 0; \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} [\nabla_\rho, [\nabla_\mu, \nabla_\nu]]\varphi &= \\ &= \nabla_\rho([\nabla_\mu, \nabla_\nu]\varphi) - [\nabla_\mu, \nabla_\nu]\nabla_\rho\varphi = \\ &= \text{\textbackslash если нет кручения \textbackslash} = -[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\partial_\rho\varphi = \\ &\quad - \partial_\sigma\varphi R^\sigma_{\mu\nu\rho} \Rightarrow (2.82) \quad (2.84) \end{aligned}$$

5. Тождество Бьянки:

$$\nabla_\rho R^\lambda_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\lambda_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda_{\sigma\rho\mu} = 0 \quad (2.85)$$

Перейти в локально-лоренцеву систему отсчета, получить тождество в ней (используя  $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0$ ). Используя тензорный характер равенства, отсюда следует, что верно и в любой системе отсчёта  $\star$ .

Число независимых компонент  $\star$ :

$$N = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12} \quad (2.86)$$

$$n = 4 \rightarrow N = 20 \quad (2.87)$$

$$n = 3 \rightarrow N = 6 \quad (2.88)$$

$$n = 2 \rightarrow N = 1 \quad (2.89)$$

**Тензор Риччи:**

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \quad (2.90)$$

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu} \star \quad (2.91)$$

**Скаляр кривизны** (не гауссова кривизна!):

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^\mu_{\mu} = R^{\lambda\nu}_{\lambda\nu} \quad (2.92)$$