

## Лекция 4

Однородные и изотропные пространства. Уравнение Фридмана.  
Решения уравнений изотропной однородной космологии.

## Однородные и изотропные трехмерные пространства

Однородных и изотропных трехмерных пространств всего три: евклидово пространство, трехмерная сфера, трехмерная псевдосфера.

*Евклидово трехмерное пространство (3-плоскость)*  
Есть такая система координат, что во всем пространстве

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (4.1)$$

*3-сфера*

Фиктивное 4-мерное евклидово пространство:

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2 \quad (4.2)$$

Уравнение 3-сферы:

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = a^2 \quad (4.3)$$

Описывается тремя параметрами:

$$\begin{aligned} y^1 &= a \cos \chi \\ y^2 &= a \sin \chi \cos \theta \\ y^3 &= a \sin \chi \sin \theta \cos \varphi \\ y^4 &= a \sin \chi \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = a^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad \star \quad (4.5)$$

★ Упражнение: попробуйте отгадать параметризацию 4-х мерной сферы в 5-мерном пространстве и выражение для элемента длины на 4-х мерной сфере. Тоже для  $n - 1$  мерной сферы в  $n$ -пространстве.

В квадратных скобках – метрика единичной 3-сферы, никаких упоминаний фиктивного 4-мерного пространства  $(y^1, y^2, y^3, y^4)$  нет.

*3-псевдосфера (гиперболоид)* Фиктивное 4-мерное псевдоевклидово пространство:

$$ds^2 = (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2 - (dy^4)^2 \quad (4.6)$$

3-псевдосфера – это сфера в 4-пространстве Минковского (псевдосфера):

$$(y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 = a^2, \quad y^1 > 0 \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} y^1 &= a \operatorname{ch} \chi \\ y^2 &= a \operatorname{sh} \chi \cos \theta \\ y^3 &= a \operatorname{sh} \chi \sin \theta \cos \varphi \\ y^4 &= a \operatorname{sh} \chi \sin \theta \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = a^2 [d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad \star \quad (4.9)$$

Как понять, что эти пространства однородны? Для 3-сферы, 3-плоскости и 3-псевдосферы

$$R_{ijkl} = \frac{\varkappa}{a^2} (\gamma_{ik} \gamma_{jl} - \gamma_{il} \gamma_{jk}) \quad (4.10)$$

$$\varkappa = \begin{cases} +1 & - & 3\text{-сфера} \\ 0 & - & 3\text{-плоскость} \\ -1 & - & 3\text{-псевдосфера} \end{cases} \quad (4.11)$$

Проверяется прямым вычислением, или в ковариантном формализме: см. Robert M. Wald, *General Relativity* Sec. 5.1, p. 91.

$$R_{ij} = 2 \frac{\varkappa}{a^2} \gamma_{ij} \quad \star \quad (4.12)$$

$$R = 6 \frac{\varkappa}{a^2} \quad \star \quad (4.13)$$

Скаляр кривизны всюду одинаков – пространства постоянной кривизны.

## Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij}dx^i dx^j \quad (4.14)$$

$\gamma_{ij}$  – метрика одного из однородных 3-пространств.

Для сферы и псевдосферы можно взять метрику единичных сфер:

тогда  $a(t)$  имеет физический смысл радиуса сферы.

Для 3-плоскости физ. смысл имеет только  $a(t_1)/a(t_2)$

$$\hat{g} = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & a^2(t)\hat{\gamma} \end{array} \right) \quad (4.15)$$

*Только в рамках модели FRW космологическое время приобретает смысл!*

Космологическое время не имеет точного смысла, так как метрика FRW не является совершенно точной.

## Координаты FRW – сопутствующая система отсчета неподвижной космологической жидкости

Докажем, что FRW система отсчета связана с свободной неподвижной космологической жидкостью, то есть:

Неподвижные в координатах FRW частицы движутся свободно, т.е. по геодезическим.

Что такое неподвижные частицы:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = 0; \quad u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{dt} = 1 \quad (4.16)$$

$$\forall \mu : \frac{du^\mu}{ds} = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu u^\lambda = 0 \quad (4.18)$$

Подставляем (4.16), (4.17) в (4.18):

$$\text{Должно быть: } 0 + \Gamma_{00}^\mu u^0 u^0 = \Gamma_{00}^\mu = 0 \quad (4.19)$$

Нужно проверить, что действительно  $\Gamma_{00}^\mu = 0$ .

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda}) \quad (4.20)$$

$$\Gamma_{00}^0 = 0; \quad \Gamma_{00}^i = 0; \quad \Gamma_{0i}^0 = 0 \quad \star \quad (4.21)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a} \quad \star \quad (4.22)$$

$$\Gamma_{ij}^0 = a\dot{a}\gamma_{ij} \quad \star \quad (4.23)$$

$$\Gamma_{jk}^i = {}^{(3)}\Gamma_{jk}^i \quad \star \quad (4.24)$$

## Уравнение Фридмана

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \quad (4.25)$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - \partial_\mu \Gamma_{\nu\lambda}^\lambda + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda\nu}^\sigma \quad (4.26)$$

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma_{0\lambda}^\lambda - \Gamma_{0\sigma}^\lambda \Gamma_{0\lambda}^\sigma = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \star \quad (4.27)$$

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad (4.28)$$

$$R_{0i} = \partial_j \Gamma_{0i}^j - \partial_0 \Gamma_{i\lambda}^\lambda + \Gamma_{0i}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{0\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda i}^\sigma = 0 \star \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \partial_\lambda \Gamma_{ij}^\lambda - \partial_i \Gamma_{j\lambda}^\lambda + \Gamma_{ij}^\lambda \Gamma_{\lambda\sigma}^\sigma - \Gamma_{i\sigma}^\lambda \Gamma_{\lambda j}^\sigma = \\ &\quad \partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \partial_k \Gamma_{ij}^k \\ &\quad - \partial_i \Gamma_{j0}^0 - \partial_i \Gamma_{jl}^l \\ &\quad + (\Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{k\sigma}^\sigma) \\ &\quad - (\Gamma_{ik}^0 \Gamma_{0j}^k + \Gamma_{i0}^k \Gamma_{jk}^0 + \Gamma_{il}^k \Gamma_{jk}^l) = \\ &= \partial_0 \Gamma_{ij}^0 + \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0\sigma}^\sigma - \Gamma_{ik}^0 \Gamma_{0j}^k - \Gamma_{i0}^k \Gamma_{jk}^0 + {}^{(3)}R_{ij} = \\ &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2) \gamma_{ij} + {}^{(3)}R_{ij} = \\ &= \left\langle {}^{(3)}R_{ij} = 2 \frac{\varkappa}{r^2} \gamma_{ij}; \quad r \equiv 1; \quad \varkappa = +1, 0, -1 \right\rangle = \\ &= (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\varkappa) \gamma_{ij} \quad (4.30) \end{aligned}$$

$$R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\varkappa) \gamma_{ij} \quad (4.31)$$

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = g^{00} R_{00} + g^{ij} R_{ij} = -6 \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varkappa}{a^2} \right) \Rightarrow \quad (4.32)$$

ЛЧ, 00-компонента уравнений Эйнштейна:

$$R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} R = 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varkappa}{a^2} \right) \quad (4.33)$$

Покоящаяся материя:

$$T_{00} = \rho; \quad g_{00} \Lambda = \Lambda \Rightarrow \quad (4.34)$$

Уравнение Фридмана (с  $\Lambda$ -членом)

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (4.35)$$

Как меняется  $\rho$  в зависимости от  $t$  и  $a$ ?

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu 0} &= \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma_{\mu\sigma}^\mu T^{\sigma 0} + \Gamma_{\mu\sigma}^0 T^{\mu\sigma} = \\ &= \partial_0 T^{00} + \Gamma_{i0}^i T^{00} + \Gamma_{ij}^0 T^{ij} = \\ &= \left\langle T^{ij} = (p + \rho) u^i u^j - p g^{ij} = -p g^{ij} = \frac{1}{a^2} p \gamma^{ij} \right\rangle = \\ &= \dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) = 0 \quad (4.37) \end{aligned}$$

## Полная система уравнений изотропной космологии:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (\text{уравнение Фридмана}) \quad (4.38)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (\text{ковариантное сохранение}) \quad (4.39)$$

$$p = p(\rho) \quad (\text{уравнение состояния}) \quad (4.40)$$

## Решения уравнений изотропной однородной космологии

Решения для  $\varkappa = 0$ ,  $\Lambda = 0$   
(пространственно плоская вселенная)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \quad (4.41)$$

*Нерелятивистская пыль.* Уравнение состояния:

$$p = 0 \quad (4.42)$$

Из (4.39):

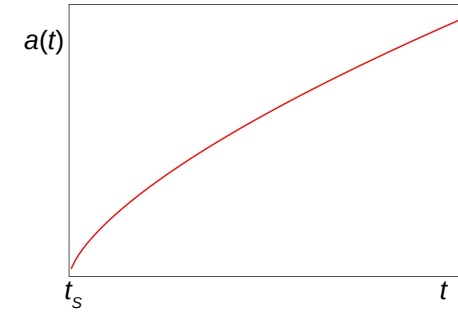
$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow d(\ln \rho) = d(\ln a^{-3}) \Rightarrow \quad (4.43)$$

$$\rho = \frac{\text{const}}{a^3} \quad (\text{сохранение числа частиц}) \quad (4.44)$$

Из (4.41):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\text{const}}{a^3} \Rightarrow a(t) = \text{const}'(t - t_s)^{2/3} \quad (4.45)$$

При  $a(t_s) = 0$  – сингулярность.



Будем полагать  $t_s = 0$ :

$$a(t) = \text{const } t^{2/3} \quad (4.46)$$

$$\rho = \frac{\text{const}}{t^2} \quad (4.47)$$

В момент сингулярности пространство было плоским и *бесконечным*, плотность была бесконечной.

Постоянную в (4.47) можно найти из (4.41):

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\text{const}(2/3)t^{-1/2}}{\text{const } t^{2/3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{t} \Rightarrow \rho = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2} \quad (4.48)$$

Постоянная Хаббла:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} \quad (4.49)$$

$1/H$  во всех моделях порядка возраста Вселенной (от сингулярности!)

В частности, в модели пыли

$$H(t) = \frac{2}{3} \frac{1}{t}, \quad t = \frac{2}{3} \frac{1}{H(t)} \quad (4.50)$$

Современное ( $t_0$ ) значение постоянной Хаббла:

$$H_0 \equiv H(t_0) = h \times 100 \frac{\text{км/с}}{\text{Мпк}}, \quad h = 0.6774 \pm 0.0046 \quad (4.51)$$

В модели пыли:

$$t_0 \approx 3.0 \cdot 10^{17} \text{ sec} \approx 9.6 \cdot 10^9 \text{ years} \star \quad (4.52)$$

*H0-tension problem*

$h \approx 0.68$  по анизотропии микроволнового фона

$h \approx 0.73$  по локальным наблюдениям

## Космологический горизонт

Конформное время (плоская метрика).

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j = a^2(t) (d\eta^2 - \delta_{ij} dx^i dx^j) \quad (4.53)$$

$$d\eta = dt/a(t) \quad (4.54)$$

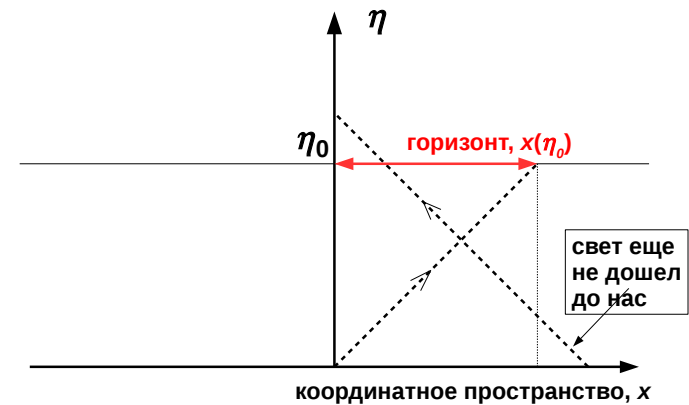
– конформно-плоская метрика.

Для плоской модели с пылью:

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^t \frac{dt}{\text{const} \cdot t^{2/3}} = \frac{3}{\text{const}} \cdot t^{1/3} \quad (4.55)$$

Светоподобные геодезические:  $ds^2 = 0 \Rightarrow$

$$d\eta^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j = dx^2 \Rightarrow d\eta = |dx| \quad (4.56)$$



$$x(\eta_0) = \eta_0 = \eta(t_0) \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned}
l_H(t_0) &= a(t_0)x(\eta_0) = a(t_0)\eta(t_0) = \\
&= a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \text{const} \cdot t_0^{2/3} \int_0^{t_0} \frac{dt}{\text{const} \cdot t^{2/3}} = 3t_0 = \\
&= 28.8 \cdot 10^9 \text{ св. лет} \quad (4.58)
\end{aligned}$$

( $ct_0 \sim 9.6 \cdot 10^9$  св. лет – много меньше горизонта!)

★ Пусть мы наблюдаем объект с возрастом  $\Delta t$ . Каково до него расстояние (в модели пыли)? Почему для малых расстояний  $L \approx c\Delta t$ ?

## Красное смещение

*Эволюция свободного электромагнитного поля*

$$S_{Mink} = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\nu\rho} F_{\nu\rho}; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.59)$$

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F^{\nu\rho} F_{\nu\rho} \quad (4.60)$$

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.61)$$

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} g^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} \quad (4.62)$$

В конформно-плоской метрике

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j] \quad (4.63)$$

Имеем

$$g_{\mu\nu}(\eta) = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu} \quad (4.64)$$

$$g^{\mu\nu}(\eta) = \frac{1}{a^2(\eta)}\eta^{\mu\nu} \quad (4.65)$$

$$\sqrt{-g} = a^4 \quad (4.66)$$

Из (4.62):

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{4} \int d^4x a^4 \frac{1}{a^4} \eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\rho} F_{\mu\lambda} F_{\nu\rho} = \\
&= -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\nu\rho} F_{\nu\rho} \quad (4.67)
\end{aligned}$$

– электромагнитное поле конформно-инвариантно. Плоская волна в  $(\eta, x^i)$ -пространстве распространяется как в пространстве Минковского:

$$A_\mu^{(\alpha)} = e_\mu^{(\alpha)} \exp[i(|k|\eta - \mathbf{k}\mathbf{x})] \quad (4.68)$$

$|k|$  – не частота, и  $\mathbf{k}$  – не волновой вектор в физическом пространстве!

Но можно перейти к физическим величинам:

$$\begin{aligned}
\Delta\eta = \frac{2\pi}{k} &\text{ – конформный период,} \\
&\text{не зависит от конформного времени} \quad (4.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta T(t) = a(t)\Delta\eta &\text{ – физический период,} \\
&\text{растет пропорционально } a(t) \quad (4.70)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega(t) = \frac{2\pi}{\Delta T(t)} = \frac{2\pi}{a(t)\Delta\eta} = \frac{k}{a(t)} &\text{ – физическая частота,} \\
&\text{падает обратно пропорционально } a(t) \quad (4.71)
\end{aligned}$$

**Уменьшение частоты – красное смещение.**

Появляется вследствие растяжения пространства  $a(t)$ !

Не эффект Доплера!

## Эволюция скорости свободных частиц

Координатная скорость частицы отлична от нуля:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \neq 0; \quad ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}x^ix^j \quad (4.72)$$

Физическая скорость частицы:

$$dX^i = a(t)dx^i \Rightarrow U^i = \frac{dX^i}{ds} = a(t)u^i \quad (4.73)$$

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu u^\lambda = 0 \Rightarrow \backslash \Gamma_{jk}^i = 0, \Gamma_{00}^0 = 0 \backslash \Rightarrow \quad (4.74)$$

$$\frac{du^i}{ds} + 2\Gamma_{0j}^i u^0 u^j = 0 \quad (4.75)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \delta_j^i \frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \frac{du^i}{ds} + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{dt}{ds} u^i = 0 \quad (4.76)$$

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{dt}{ds} \frac{du^i}{dt} = \frac{dt}{ds} \frac{d}{dt} \left( \frac{U^i}{a} \right) = \frac{dt}{ds} \left( \frac{dU^i}{dt} \frac{1}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2} U^i \right) \quad (4.77)$$

$$\frac{dt}{ds} \left( \frac{dU^i}{dt} \frac{1}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2} U^i \right) + 2 \frac{\dot{a}}{a} \frac{dt}{ds} \frac{1}{a} U^i = 0 \quad (4.78)$$

$$\frac{dU^i}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a} U^i \quad (4.79)$$

$$\frac{dU^i}{U^i} = -\frac{da}{a} \Rightarrow U^i = \frac{\text{const}}{a(t)} = U^i(t_{ini}) \frac{a(t_{ini})}{a(t)} \quad (4.80)$$

Скорость (и импульс  $p_i = mU_i$ , но не энергия!) массивных частиц падает как  $1/a(t)$ .

- Все импульсы падают как  $1/a(t)$ !

Можно представить себе падение импульсов как результат растяжения волны де Бройля вместе с растяжением пространства.

Красное смещение  $z$  определяется через изменение частоты света:

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = 1 + z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} \Rightarrow \quad (4.81)$$

$$\boxed{z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} - 1} \quad (4.82)$$

## Закон Хаббла

$t_i$  близко в прошлом к  $t_0$

$$\begin{aligned} a(t_i) &= a(t_0) + (t_i - t_0)\dot{a}(t_0) = \\ &= a(t_0) \left[ 1 - (t_0 - t_i) \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)} \right] = \\ &= a(t_0) [1 - (t_0 - t_i) H_0] \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_0) [1 - (t_0 - t_i) H_0]} - 1 \cong (t_0 - t_i) H_0 \quad (4.84)$$

Но  $t_0 - t_i \cong r \Rightarrow$

$$z(t_i) = r H_0 \quad (4.85)$$



*Космологическое красное смещение – не Доплеровское!*

Больше похоже на растяжение длины волны частиц любой природы вместе с космологическим растяжением пространства.

Это следует также из контекста, в котором относительные скорости могут превышать скорость света.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2 \quad (4.86)$$

Поместим себя в точку 0, момент времени  $t_0$ .  
Физическое расстояние до точки на координатном расстоянии  $l$

$$r(t_0) = a(t_0)l \quad (\text{это точное равенство}) \quad (4.87)$$

$$\dot{r}(t_0) = v(t_0) = \dot{a}l \quad (4.88)$$

– скорость может быть сколь угодно велика при достаточно большом  $l$ !

– Многие наблюдаемые сейчас объекты удаляются от нас быстрее света.

– Эффект Доплера не имеет смысла в такой ситуации.

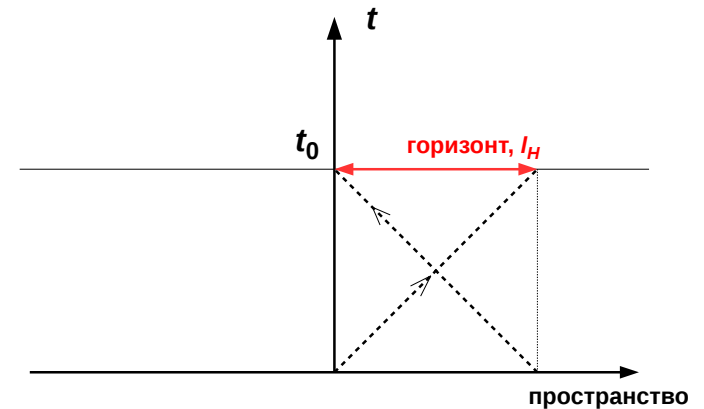
*Откуда берется иллюзия эффекта Доплера?*

Эффект Доплера для малых  $v$  есть:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c} \equiv v = \dot{a}l = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right) al = Hr \quad (4.89)$$

Для малых расстояний космологическое красное смещение выглядит как эффект Доплера (и ошибочно трактуется как эффект Доплера).

Как мы видим горизонт?



Для горизонта  $t_i = 0 \Rightarrow$

$$z(0) = \frac{a(t_0)}{a(0)} - 1 = \frac{a(t_0)}{0} - 1 = \infty \quad (4.90)$$

Горизонт виден при бесконечном красном смещении – *как бы* удаляющимся со скоростью света (если использовать неверную трактовку красного смещения как эффекта Доплера).

## Ультррелятивистское вещество, плоская вселенная

$$p = \frac{1}{3}n\langle vP \rangle - \text{для любого газа} \quad (4.91)$$

Ультррелятивистский (УР) газ:

$$E^2 = m^2 + P^2 \approx P^2 \Rightarrow P \cong E, \quad v \cong 1 \Rightarrow \quad (4.92)$$

$$p = \frac{1}{3}nE = \frac{1}{3}\rho \quad (4.93)$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3}\rho} \quad (4.94)$$

Как  $\rho$  зависит от  $a$ ?

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (\text{сохр. ТЭИ}) \quad (4.95)$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -4\frac{da}{a} \quad (4.96)$$

$$\boxed{\rho = \frac{\text{const}}{a^4}} \quad (4.97)$$

(не  $1/a^3$ !)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{\text{const}}{a^4} \quad (4.98)$$

$$\boxed{a(t) = \text{const}'t^{1/2}} \quad (4.99)$$

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} \quad (4.100)$$

(для пыли было  $\frac{2}{3t}$ )

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^2} \quad (4.101)$$

Горизонт:

$$l_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = 2t = \frac{1}{H(t)} \quad (4.102)$$

(для пыли  $2/H(t)$ )

---

## Вакуум и де-Ситтеровское плоское решение

Никакой материи кроме  $\Lambda$ -члена.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\Lambda, \quad \Lambda = \text{const} \geq 0 \quad (4.103)$$

В плоском случае для  $\Lambda < 0$  решения нет!

$$\frac{\dot{a}}{a} = (\pm) \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\Lambda} = (\pm)H_{dS} \Rightarrow \quad (4.104)$$

$$a(t) = \text{const} \times e^{(+)\!H_{dS}t} \quad (4.105)$$

Сжимающиеся решения не физичны (?).

Сингулярности нет. Космологический горизонт  $= +\infty$  (тоже нет).

$\Lambda$  ведет себя как плотность вакуума:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \setminus p = -\rho \setminus \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \quad (4.106)$$

Плотность постоянна (что и ожидается от вакуума).