Лекция 14

Инфляционная космология. Модели инфляции: поле инфлатона и режим медленного скатывания

Идея инфляции (качественно)

После Горячего Большого взрыва

$$\ddot{a} < 0 \tag{14.1}$$

Инфляция, по определению – расширение вселенной с

$$\ddot{a} > 0 \tag{14.2}$$

Вводится новая шкала времени, в которой инфляция начинается в момент t_{Pl}, а до того было неизвестно что (эпоха квантовой гравитации). Предполагается:

- Имеет место от $t \sim t_{Pl}$ до t_E (E значит End)
- В момент t_E инфляция сменяется горячей стадией
- (Приближенно) предполагается, что горячая стадия наступает мгновенно после окончания инфляции и наследует $H(t_E)$
- В начале горячей (РД!) стадии

$$H = \frac{T^2}{M^*_{Pl}} \Rightarrow T_{reh} = \sqrt{M^*_{Pl} H(t_E)} \tag{14.3}$$

Важная величина:

$$\dot{a} = a\frac{\dot{a}}{a} = aH \tag{14.4}$$

$$\ddot{a} < 0 \Rightarrow aH \text{ убывает, горячая стадия} \tag{14.5}$$

$$\ddot{a} > 0 \Rightarrow aH \text{ возрастает, инфляция} \tag{14.6}$$

Решение проблемы плоскостности

Уравнение Фридмана с кривизной:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \tag{14.7}$$

$$\frac{8\pi G}{3}\left[\rho + \Lambda - \frac{3}{8\pi G}\frac{\varkappa}{a^2}\right] = H^2 \tag{14.8}$$

$$\frac{8\pi G}{3}\rho_c(t) = H^2(t) \Rightarrow \rho_c(t) = \frac{3}{8\pi G}H^2(t) \tag{14.9}$$

$$\rho_K(t) = -\frac{3}{8\pi G}\frac{\varkappa}{a^2} \tag{14.10}$$

$$\Omega_K(t) \equiv \frac{\rho_K(t)}{\rho_c(t)} = \frac{1}{a^2(t)H^2(t)} \tag{14.11}$$

Хотим, чтобы начальная (на момент «квантового рождения» Вселенной) кривизна была не очень мала:

$$\Omega_K(t_{Pl}) \gtrsim \Omega_K(t_0) \Leftrightarrow \frac{\Omega_K(t_0)}{\Omega_K(t_{Pl})} \lesssim 1 \Leftrightarrow \tag{14.12}$$

$$\frac{[a(t_{Pl})H(t_{Pl})]^2}{(a_0H_0)^2} \lesssim 1 \Leftrightarrow \frac{a(t_{Pl})H(t_{Pl})}{a_0H_0} \lesssim 1 \Leftrightarrow \tag{14.13}$$

$$\frac{a(t_{Pl})H(t_{Pl})}{a(t_E)H(t_E)}\frac{a(t_E)H(t_E)}{a_0H_0} \lesssim 1 \Leftrightarrow \tag{14.14}$$

$$\frac{a(t_E)H(t_E)}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \gtrsim \frac{a(t_E)H(t_E)}{a_0H_0} \tag{14.15}$$

Этого всегда можно добиться, если $a(t)H(t) = \dot{a}(t)$ растет достаточно быстро от t_{Pl} до t_E

Решение проблемы горизонта

Оценим размер области, которая была причинно связана на момент t_E, в настоящее время.
Горизонт t_E:

$$l_{H,e} = a(t_E)\int_{t_{Pl}}^{t_E}\frac{dt}{a(t)} \tag{14.16}$$

$$l_{H,e}(t_0) = \frac{a_0}{a(t_E)}\,l_{H,e} = \frac{a_0}{a(t_E)}a(t_E)\int_{t_{Pl}}^{t_E}\frac{dt}{a} = a_0\int_{t_{Pl}}^{t_E}\frac{dt}{a} =$$
$$= \left\backslash\; da = \dot{a}dt \Rightarrow dt = \frac{da}{\dot{a}} \right\backslash =$$
$$= a_0\int_{a(t_{Pl})}^{a(t_E)}\frac{da}{a\dot{a}} = a_0\int_{a(t_{Pl})}^{a(t_E)}\frac{da}{a^2H} \tag{14.17}$$

a^2H – быстро растет, так как aH растет;
Будем предполагать, что H меняется относительно медленно (т.е. рост a близок экспоненциальному);
Интеграл набирается на нижнем пределе:

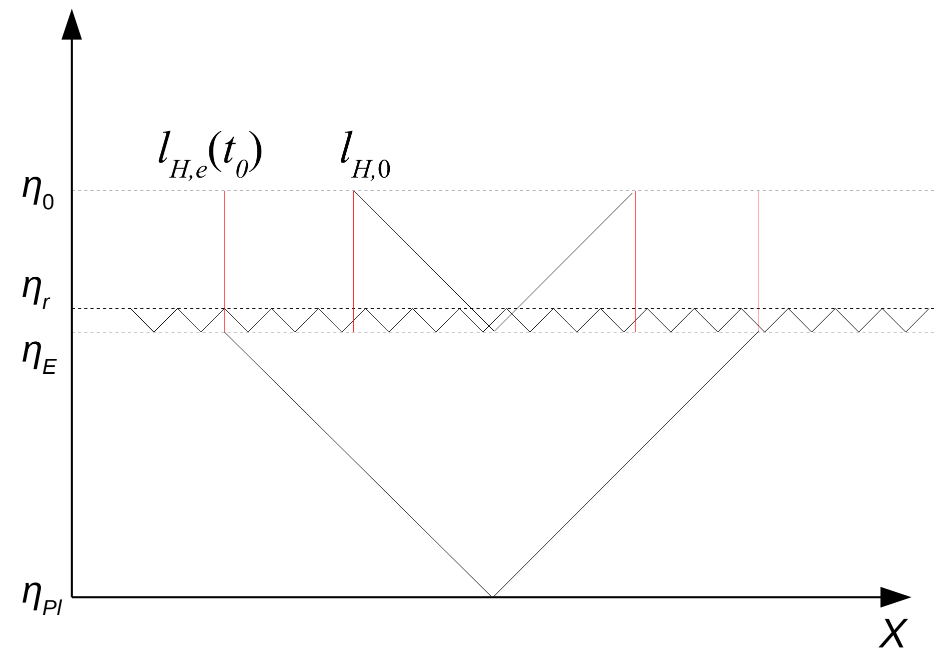
$$a_0\int_{a(t_{Pl})}^{a(t_E)}\frac{da}{a^2H} \sim \frac{a_0}{H(t_{Pl})}\int_{a(t_{Pl})}^{a(t_E)}\frac{da}{a^2} \sim \frac{a_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \tag{14.18}$$

Сравним с горизонтом сейчас, если считать его от момента Большого взрыва = разогрева:

$$\frac{l_{H,e}(t_0)}{l_{H,0}} \simeq \frac{a_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})}\times H_0 = \frac{a_0H_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \tag{14.19}$$

$$\frac{l_{H,e}(t_0)}{l_{H,0}} > 1 \Leftrightarrow \frac{a_0H_0}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} > 1 \tag{14.20}$$

То же самое, что условие на кривизну (14.13) $\Rightarrow$ проблема плоскостности и проблема горизонта решаются одновременно!



Оценка необходимой длительности инфляции

(14.15):
$$\frac{a(t_E)H(t_E)}{a(t_{Pl})H(t_{Pl})} \gtrsim \frac{a(t_E)H(t_E)}{a_0H_0}$$

Из (14.15):

$$\frac{a(t_E)}{a(t_{Pl})} \gtrsim \frac{a(t_E)}{a_0}\,\frac{H(t_E)}{H_0}\,\frac{H(t_{Pl})}{H(t_E)} = \frac{T_0}{T_{reh}}\,\frac{H(t_{Pl})}{H_0} \tag{14.21}$$

Число e-фолдингов:

$$N_e^{(tot)} \equiv \ln\frac{a(t_E)}{a(t_{Pl})} \tag{14.22}$$

$$N_e^{(tot)} > \ln\frac{T_0}{H_0} + \ln\frac{H(t_{Pl})}{T_{reh}} \simeq \ln\frac{T_0}{H_0} + \ln\frac{M_{Pl}}{T_{reh}} \quad (14.23)$$

$$\frac{T_0}{H_0} \sim 10^{29};\ \ln 10^{29} \approx 67 \Rightarrow \quad (14.24)$$

$$N_e^{(tot)} > 67 + \ln\frac{M_{Pl}}{T_{reh}} \quad (14.25)$$

Для $T_{reh} = M_{Pl} \div 1\,\text{TeV}$

$$N_e^{(min)} \simeq 70 \div 100 \quad (14.26)$$

Каково минимальное время инфляции, в секундах?

Если инфляция приблизительно экспоненциальна, то

$$N_e^{tot} \sim H_{infl}\Delta t_{infl} \quad (14.27)$$

$$H_{infl} \sim H(t_E) = \frac{T_{reh}^2}{M_{Pl}^*}\ [\text{см. } (14.3)] \quad (14.28)$$

$$\frac{T_{reh}^2}{M_{Pl}^*}\Delta t_{infl}^{min} = 70 \div 100 \Rightarrow \quad (14.29)$$

$$t_{infl}^{min} = M_{Pl}^* \frac{70 \div 100}{(M_{Pl} \div 1\,\text{TeV})^2} = 10^{-42} \div 10^{-9}\,\text{сек} \quad (14.30)$$

Общие замечания

1. Эта оценка $N_e^{(min)}$ немного завышена из-за предположения о мгновенности разогрева. Принятое значение $N_e^{(min)} \simeq 60$.
2. Скорее всего $N_e^{(tot)} \gg N_e^{(min)} \Rightarrow \Omega_K \ll 0.001$.
3. Проблема энтропии решается разогревом в момент t_E (как – см. ниже)
4. Проблема начальных возмущений решается за счет квантовых флуктуаций поля инфлатона (см. ниже).
5. Проблема монополей.
   - Если $T_{reh} < M_{GUT}$, то монополи в горячей фазе никогдла не рождались.
   - Если монополи рождались *до* инфляции, то инфляция сделала их плотность пренебрежимо малой.

Модели инфляции

Де-Ситтеровская вакуумная инфляция

• Какая материя нужна, чтобы получить инфляцию?

• Простейший вариант уже известен: плотность вакуума, Λ-член:

$$T_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \Rightarrow \rho = \Lambda,\ p = -\Lambda = -\rho \quad (14.31)$$

$$a(t) = \text{const} \times e^{H_{vac}t} \quad (14.32)$$

$$H_{vac} = \sqrt{\frac{8\pi}{3}\frac{\Lambda}{M_{Pl}^2}} \quad (14.33)$$

• Проблема: Инфляция не кончается (Роджер Пенроуз не согласен).

• Надо придумать что-то похожее на Λ-член, но не Λ-член, и чтобы инфляция естественным образом кончалась.

Скалярное поле

• В некоторых случаях ведет себя очень похоже на Λ-член, но инфляция кончается естественным способом и может закончиться разогревом – <u>инфлатон</u>.

• Рассматривается теория вещественного скалярного поля φ с действием (для минимальной связи):

$$S_\varphi = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}\,g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\right] \tag{14.34}$$

Полное действие (без Λ-члена):

$$S = S_g + S_\varphi = \int d^4x\sqrt{-g}R + \int d^4x\sqrt{-g}\mathcal{L}(g,\varphi) \tag{14.35}$$

$\delta S = 0$ – общий принцип действия.

$$\begin{aligned}&\delta S = \delta S_g + \delta S_\varphi = \\ &= \int d^4x\,\frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} + \int d^4x\,\left(\frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta\varphi}\delta\varphi\right) = \\ &= \int d^4x\,\left(\frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} + \frac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}}\right)\delta g_{\mu\nu} + \int d^4x\frac{\delta S_\varphi}{\delta\varphi}\delta\varphi\end{aligned} \tag{14.36}$$

$\delta g_{\mu\nu}$ и $\delta\varphi$ варьируются независимо, поэтому

$$\begin{cases}\dfrac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} + \dfrac{\delta S_\varphi}{\delta g_{\mu\nu}} = 0 \to \text{Уравнения Эйнштейна} \\ \dfrac{\delta S_\varphi}{\delta\varphi} = 0 \to \text{Уравнения поля}\end{cases} \tag{14.37}$$

Требуется найти явный вид $\dfrac{\delta S_\varphi}{\delta\varphi}$.

$$\begin{aligned}\delta S_\varphi\big|_\varphi &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\delta(\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi) - \delta(V(\varphi))\right] = \\ &= \backslash\text{все считается просто } \bigstar\backslash = \\ &= -\int d^4x\left[\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi) + \sqrt{-g}\,\frac{dV}{d\varphi}\right]\delta\varphi \Rightarrow\end{aligned} \tag{14.38}$$

$$\frac{\delta S_\varphi}{\delta\varphi} = -\left[\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi) + \sqrt{-g}\frac{dV}{d\varphi}\right] \tag{14.39}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\partial_\mu(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\partial_\nu\varphi) = -\frac{dV}{d\varphi}} \tag{14.40}$$

Однородная и изотропная космология

Работаем в плоской метрике

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\mathbf{x}^2 \tag{14.41}$$

Рассматриваем только однородные поля φ

$$\partial_i\varphi = 0;\ \ i \geq 1 \tag{14.42}$$

Тогда

$$g = \begin{vmatrix}1 & & & \\ & -a^2 & & \\ & & -a^2 & \\ & & & -a^2\end{vmatrix} = -a^6 \Rightarrow \sqrt{-g} = a^3 \tag{14.43}$$

В уравнении остается только 0-компонента:

$$\frac{1}{a^3}\frac{\partial}{\partial t}\left(a^3 g^{00}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) = -\frac{dV}{d\varphi} \Rightarrow \tag{14.44}$$

$$\boxed{\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + \frac{dV}{d\varphi} = 0} \tag{14.45}$$

Скалярное поле как идеальная жидкость

ТЭИ однородного скалярного поля:

$$\delta S_\varphi\big|_g = -\frac{1}{2}\int d^4x\,\sqrt{-g}T^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \tag{14.46}$$

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - g_{\mu\nu}\mathcal{L}(g,\varphi) \tag{14.47}$$

(см. (2.111))

В локально-лоренцевой системе отсчета, где $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$T_{00} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \tag{14.48}$$

$$T_{ij} = \left[\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi)\right]\delta_{ij} \tag{14.49}$$

$$\rho(\varphi) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \tag{14.50}$$

$$p(\varphi) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi) \tag{14.51}$$

Если $\dot{\varphi}$ мало (*медленное скатывание*), то ТЭИ скалярного поля очень похож на ТЭИ Λ-члена ($\rho \approx -p$):

$$T \approx \begin{pmatrix} V(\varphi) & & & \\ & -V(\varphi) & & \\ & & -V(\varphi) & \\ & & & -V(\varphi) \end{pmatrix} \tag{14.52}$$

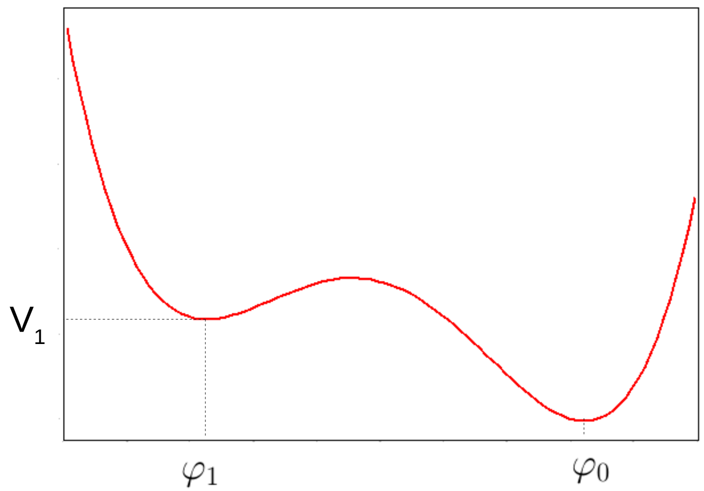
Если кроме поля φ («инфлатон») другой материи нет и поле меняется медленно, получим экспоненциальное расширение – инфляцию.

Размерности

$$[V] = \mathrm{GeV}^4 \Rightarrow [\dot{\varphi}]^2 = \mathrm{GeV}^4 \Rightarrow [\dot{\varphi}] = \mathrm{GeV}^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [\varphi] = \mathrm{GeV}; \quad V \sim g\varphi^n \Rightarrow [g] = \mathrm{GeV}^{4-n} \tag{14.53}$$

За счет чего можно получить медленное скатывание?

• Первая идея – сценарий Гута (Alan Guth), «старая инфляция» (1980)



Пока φ сидит в минимуме φ_1, $\dot\varphi = 0$ точно, $p = -\rho$ точно.
φ_1 – ложный вакуум, φ_0 – истинный вакуум.

• Поле φ локально квантово туннелирует из φ_1 в φ_0 с образованием пузырей истинного вакуума $\Rightarrow$ механизм остановки инфляции.
• Горячая материя образуется пристолкновении стенок пузырей.
• Проблема: оказалось, что из-за инфляции пузыри никогда не сталкиваются $\Rightarrow$ сценарий не работает.

Основные режимы для уравнения скалярного поля

$$(14.45):\ \ddot\varphi + 3H\dot\varphi + \frac{dV}{d\varphi} = 0 \qquad (14.54)$$

Уравнение (14.45) похоже на уравнение осциллятора с трением.
Отсюда два основных режима для решений:
• Режим быстрого скатывания $\rightarrow$ осцилляции
• Режим медленного скатывания $\rightarrow$ инфляция

1. Режим быстрого скатывания

$$H\dot\varphi \ll \ddot\varphi,\ H\dot\varphi \ll V'(\varphi) \Rightarrow \ddot\varphi + V'(\varphi) = 0 \qquad (14.55)$$

– осцилляции вблизи минимума $V(\varphi)$

<u>Пример:</u> потенциал вблизи минимума квадратичен:

$$V(\varphi) = \frac{m^2}{2}\varphi^2 \qquad (14.56)$$

Учтем явно малый член с $\dot\varphi$. Из (14.45):

$$\ddot\varphi + 3\frac{\dot a}{a}\dot\varphi + m^2\varphi = 0 \qquad (14.57)$$

Уравнение гармонического осциллятора с зависящим от времени коэффициентом затухания.

$$\varphi(t) = \frac{1}{a^{3/2}}\chi(t) \qquad (14.58)$$

$$\ddot\chi + \left[m^2 - \frac{3}{2}\frac{\ddot a}{a} - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2\right]\chi = 0 \qquad (14.59)$$

Для степенных и экспоненциальных $a(t)$ имеет место:

$$\frac{\ddot{a}}{a} \sim \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H^2 \Rightarrow \tag{14.60}$$

($\frac{3}{2}H^2$ выписан приблизительно:)

$$\ddot{\chi} + \left[m^2 - \frac{3}{2}H^2 - \frac{3}{4}H^2\right]\chi = 0 \tag{14.61}$$

Из $H\dot{\varphi} \ll V'(\varphi)$ следует $H^2 \ll m^2 \;\Rightarrow$

$$\ddot{\chi} + m^2\chi = 0 \Rightarrow \tag{14.62}$$

$$\chi(t) = \chi_* \cos(mt + \beta) \Rightarrow \tag{14.63}$$

$$\varphi(t) = \frac{\chi_*}{a^{3/2}(t)} \cos(mt + \beta) \tag{14.64}$$

– осцилляции с затуханием.

2. Режим медленного скатывания

• «Первое условие медленного скатывания»

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 \ll V(\varphi) \tag{14.65}$$

– на самом деле условие вакуумоподобности:

$$p(\varphi) = -\rho(\varphi) + \dot{\varphi}^2 \approx -\rho(\varphi) \tag{14.66}$$

При доминировании $V(\varphi)$ получаем инфляцию.

• Медленное скатывание за счет «вязкости»

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \tag{14.67}$$

Трение велико, если выполнено «второе условие медленного скатывания»:

$$3H\dot{\varphi} \gg \ddot{\varphi} \Rightarrow \frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \ll 1 \tag{14.68}$$

Имеют место <u>два</u> условия:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2V(\varphi)} \;\ll\; 1 - \text{из ТЭИ} \tag{14.69}$$

$$\frac{\ddot{\varphi}}{3H\dot{\varphi}} \;\ll\; 1 - \text{из ур. движения} \tag{14.70}$$

• Почему не условие типа $3H\dot{\varphi} \gg V'(\varphi)$?

• Если выполнены оба условия, то имеется *квази-экспоненциальное* расширение Вселенной и уравнения сильно упрощаются:

Действительно, исходим из полной системы:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \\ H^2 = \dfrac{8\pi}{3M_{Pl}^2}\left(\dfrac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right) \end{cases} \tag{14.71}$$

При выполнении условий (14.69), (14.70) приводятся к виду:

$$\dot{\varphi} \;=\; -\frac{1}{3H}V'(\varphi) \tag{14.72}$$

$$H \;=\; \frac{1}{M_{Pl}}\left(\frac{8\pi}{3}V(\varphi)\right)^{1/2} \tag{14.73}$$

Из (14.73):

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{M_{Pl}}\left(\frac{8\pi}{3}V\right)^{1/2} \Rightarrow \tag{14.74}$$

$$a(t) = a_i \exp\left\{\left(\frac{8\pi}{3M_{Pl}^2}\right)^{1/2}\int_{t_i}^{t}[V(\varphi(t))]^{1/2}dt\right\} \tag{14.75}$$

Расширение близко к экспоненциальному в том смысле, что изменение H за хаббловское время много меньше H:

$$\dot{H}\frac{1}{H} \ll H \Rightarrow \frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1 \tag{14.76}$$

Из (14.73):

$$\dot{H} = \frac{1}{2M_{Pl}}\left(\frac{8\pi}{3V}\right)^{1/2} V'(\varphi)\dot{\varphi} \tag{14.77}$$

Из (14.73) и (14.77):

$$\frac{\dot{H}}{H} = \frac{1}{2}\frac{V'}{V}\dot{\varphi} = \backslash(14.72)\backslash = -\frac{3}{2}\frac{\dot{\varphi}^2}{V}H \Rightarrow$$
$$\left|\frac{\dot{H}}{H^2}\right| = \frac{3}{2}\frac{\dot{\varphi}^2}{V} \ll 1 \tag{14.78}$$

Из (14.69) следует, что это и правда так при медленном скатывании.