Лекция 10

Эволюция векторных и тензорных мод. Эволюция скалярных мод для однокомпонентных сред. Адиабатическая мода и мода постоянной кривизны.

Эволюция векторных мод

Векторные моды:

$$
\begin{aligned}
h_{ij} &= \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T && (10.1)\\
v_i &= V_i^T && (10.2)\\
h_{00} &= 0 && (10.3)\\
\delta p = \delta \rho &= 0 && (10.4)\\
\delta T_i^0 &= (\rho + p) V_i^T && (10.5)
\end{aligned}
$$

Ковариантное сохранение:

$$\partial_\eta [(\rho + p) V_i^T] + 4 \frac{a'}{a} (\rho + p) V_i^T = 0 \tag{10.6}$$

$(0, i)$-компонента уравнений Эйнштейна:

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16 \pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \tag{10.7}$$

Из (10.6):

$$\frac{\partial_\eta [(\rho + p) V_i^T]}{(\rho + p) V_i^T} = -4 \frac{\partial_\eta a}{a} \Rightarrow \tag{10.8}$$

$$\boxed{(\rho + p) V_i^T = \text{const} \cdot a^{-4}} \tag{10.9}$$

Если среда НР, то похоже на сохранение момента. Для каждой компоненты среды λ (10.9) выполняется отдельно.

Для релятивистского вещества $p \propto \rho \propto a^{-4} \Rightarrow$

$$\boxed{V_i^T = \text{const}} \tag{10.10}$$

Для нерелятивистского вещества $p = 0, \rho \propto a^{-3} \Rightarrow$

$$\boxed{V_i^T = \text{const}/a} \tag{10.11}$$

Векторные моды v_i либо не растут, либо убывают.

Из (10.7) и (10.9):

$$\partial_\eta (-k^2) W_i^T = 16 \pi G a^2 \frac{\text{const}}{a^4} = \text{const} \frac{1}{a^2} \tag{10.12}$$

РД-стадия:

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\text{const}}{\text{const}\, \eta^2} = \frac{\text{const}}{\eta^2} \Rightarrow \tag{10.13}$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\text{const}}{\eta} = \frac{\text{const}}{a}} \tag{10.14}$$

ДМ-стадия:

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\text{const}}{\text{const}\, \eta^4} = \frac{\text{const}}{\eta^4} \Rightarrow \tag{10.15}$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\text{const}}{\eta^3} = \frac{\text{const}}{a^{3/2}}} \tag{10.16}$$

ΛД-стадия

$$\partial_\eta W_i^T = \frac{\text{const}}{(-1/H_{dS} \eta)^2} = \text{const}\, \eta^2 \Rightarrow \tag{10.17}$$

$$W_i^T = \text{const}\, \eta^3; \quad \eta = -\frac{1}{a H_{dS}} \Rightarrow \tag{10.18}$$

$$\boxed{W_i^T = \frac{\mathrm{const}}{a^3}} \tag{10.19}$$

Векторные моды гравитации *падают* во всех режимах эволюции $\Rightarrow$
падающие моды не должны себя проявлять, так как *ведут к сингулярности в начальных условиях.*

Обычно считается, что векторных мод нет
(как и любых падающих мод!).

Эволюция тензорных мод (реликтовые гравитационные волны)

Уравнение Эйнштейна для тензорных мод (см. (9.106))

$$\partial_\eta^2 h_{ij}^{TT} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h_{ij}^{TT} - \Delta h_{ij}^{TT} = 0 \tag{10.20}$$

$$h_{ij}^{TT} = \sum_A e_{ij}^{(A)} h^{(A)}; \quad A = +, \times \tag{10.21}$$

Из (10.20) для каждой (A):

$$\partial_\eta^2 h^{(A)} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h^{(A)} - \Delta h^{(A)} = 0; \tag{10.22}$$

или в импульсном представлении (для любой из компонент)

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' + k^2 h = 0 \tag{10.23}$$

Тензорные моды за горизонтом: константная мода и падающая мода

Условие на k для мод за горизонтом (9.159):

$$k \ll \frac{a'}{a} \tag{10.24}$$

Пренебрегаем в (10.23) членом $k^2 h$:

$$h'' + 2\frac{a'}{a}h' = 0 \tag{10.25}$$

Одно из решений – константная мода:

$$h = h_{(i)} = \mathrm{const} \tag{10.26}$$

(i) – initial или input.
Другое решение – падающая мода ★:

$$h(\eta) = \mathrm{const}\int_\eta^\infty \frac{d\eta}{a^2(\eta)}; \;\; h(\infty) = 0 \tag{10.27}$$

Ведет себя как падающая векторная мода

$$\begin{aligned} \text{РД} &: \; h \propto a^{-1} \\ \text{ДМ} &: \; h \propto a^{-3/2} \\ \Lambda\text{Д} &: \; h \propto a^{-3} \end{aligned}$$

Следовательно такие решения не рассматриваются.

Все тензорные моды за горизонтом – только константные моды

$$h^A = h^A_{(i)}(\mathbf{k}); \;\; A = +, \times \tag{10.28}$$

Тензорные моды под горизонтом. Сшивка с константной модой

Введем новую переменную:

$$f(\eta) = a(\eta)h(\eta) \tag{10.29}$$

Уравнение (10.23) принимает вид:

$$f'' + \left(k^2 - \frac{a''}{a}\right) f = 0 \tag{10.30}$$

Т.к. a зависит от η степенным образом (РД и ДМ стадии), то

$$\frac{a''}{a} = \text{const}\frac{1}{\eta^2},\ \text{const} \sim 1 \tag{10.31}$$

Под горизонтом

$$\frac{1}{k} \ll \eta \Rightarrow k^2 \gg \frac{1}{\eta^2} \sim \frac{a''}{a} \Rightarrow k^2 - \frac{a''}{a} \cong k^2 \Rightarrow \tag{10.32}$$

получается уравнение осциллятора

$$f'' + k^2 f = 0 \Rightarrow \tag{10.33}$$

$$f(\eta) = C\cos(k\eta + \alpha) \Rightarrow h(\eta) = \frac{C}{a(\eta)}\cos(k\eta + \alpha) \tag{10.34}$$

Падающая мода, но безопасная, так как решение не нужно экстраполировать к $a = 0$ – только до момента входа под горизонт.

C, α ищем из условия сшивки с константной модой.

Грубо (асимптотика)

Момент входа под горизонт $\eta_\times$:

$$h(\eta_\times) = \frac{C}{a(\eta_\times)}\cos(k\eta_\times + \alpha) \sim \frac{C}{a(\eta_\times)} \Rightarrow \tag{10.35}$$

$$C \sim h(\eta_\times)a(\eta_\times) \sim h_{(i)}a(\eta_\times) \Rightarrow \tag{10.36}$$

$$h(\eta) \sim h_{(i)}\frac{a(\eta_\times)}{a(\eta)}\cos(k\eta + \alpha) \tag{10.37}$$

($\eta_\times$ для разных k – разные!)

Если $h_{(i)}$ не зависят от k (белый шум), то зависимость h от k для мод, вошедших под горизонт, определяется зависимостью $a(\eta_\times(k))$

$\eta_\times \sim 1/k \Rightarrow$

Если волны входят на РД стадии

$$a(\eta_\times) = \text{const}\,\eta_\times = \text{const}\frac{1}{k} \Rightarrow h(k) \propto h_i\frac{1}{k};\ k \gg k^{(eq)} \tag{10.38}$$

Если волны входят на ДМ стадии

$$a(\eta_\times) = \text{const}\,\eta_\times^2 = \text{const}\frac{1}{k^2} \Rightarrow h(k) \propto h_i\frac{1}{k^2};\ k \ll k^{(eq)} \tag{10.39}$$

Уточнение оценки: решаем (10.23) при $\eta \sim \eta_\times$

$$(10.23)\colon\ h'' + 2\frac{a'}{a}h' + k^2 h = 0 \tag{10.40}$$

<u>Для РД-входящих мод</u>

$$\frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \Rightarrow \tag{10.41}$$

из (10.23)

$$h'' + \frac{2}{\eta}h' + k^2 h = 0 \tag{10.42}$$

Замена $x = k\eta \Rightarrow$

$$\frac{d^2h}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dh}{dx} + h = 0 \tag{10.43}$$

Решение, стремящееся к константе при $x \to 0$ есть сферическая функция Бесселя 0-го порядка:

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x} \tag{10.44}$$

$$h(\eta) = h_{(i)}\,\frac{\sin k\eta}{k\eta} \tag{10.45}$$

• Это решение верно лишь на РД-стадии, вблизи $\eta_\times$. Как оно ведет себя потом?

Запишем в виде (переходит в (10.45) вблизи $\eta_\times$):

$$h(\eta) = h_{(i)}\,\frac{a(\eta_\times)}{\eta_\times}\,\frac{\sin k\eta}{ka(\eta)} \tag{10.46}$$

$a(\eta) = \mathrm{const} \times \eta$, отношение $a(\eta)/\eta$ не зависит от времени (вблизи $\eta_\times$). Из (8.101):

$$\frac{a(\eta_\times)}{\eta_\times} = \left(\frac{g_*}{g_{*,0}}\right)^{1/6} a_0^2 H_0 \sqrt{\Omega_{rad}} \Rightarrow \tag{10.47}$$

$$h(\eta) = h_{(i)}\left[\left(\frac{g_*}{g_{*,0}}\right)^{1/6} a_0^2 H_0 \sqrt{\Omega_{rad}}\right]\frac{\sin k\eta}{ka(\eta)} \tag{10.48}$$

Это решение универсально верно при всех η после входа моды под горизонт, так как амплитуда универсально падает как $1/a$ (см. грубую оценку выше)! <u>Фаза колебания фиксирована!</u>

$$\frac{a_0^2}{ka(\eta)} = \frac{a_0}{a(\eta)}\,\frac{1}{k/a_0} = \frac{a_0}{a(\eta)}\,\frac{1}{q_0};\ \ k\eta = q_0(a_0\eta) \tag{10.49}$$

<u>Для ДМ-входящих мод</u>

$$a(\eta) = \mathrm{const}\,\eta^2;\ \ \frac{a'}{a} = \frac{2\eta}{\eta^2} = \frac{2}{\eta} \tag{10.50}$$

из (10.23)

$$h'' + \frac{4}{\eta}h' + k^2 h = 0 \tag{10.51}$$

Замена:

$$h(\eta) = \frac{1}{\eta}y(\eta) \Rightarrow \tag{10.52}$$

$$\frac{d^2y}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta}\frac{dy}{d\eta} + \left(k^2 - \frac{2}{\eta^2}\right)y = 0 \tag{10.53}$$

Еще замена: $x = k\eta \Rightarrow$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{2}{x^2}\right) y = 0 \qquad (10.54)$$

– уравнение для сферической функции Бесселя 1-го порядка:

$$j_1(x) = \frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right) \qquad (10.55)$$

Асимптотика $j_1(x \to 0) = 1/3$.

Решение с асимптотикой $h(\eta \to 0) = h_{(i)}$:

$$h(\eta) = -3h_{(i)}\frac{1}{(k\eta)^2}\left(\cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta}\right) \qquad (10.56)$$

$$h(\eta) = -3h_{(i)}\frac{a(\eta_\times)}{\eta_\times^2}\,\frac{1}{k^2a(\eta)}\,\left(\cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta}\right) =$$

$$= \Bigg\backslash \text{ Из (8.45) : } \frac{a}{\eta^2} = \frac{a_0^3H_0^2\Omega_M}{4} \Bigg\backslash =$$

$$= -3h_{(i)}\frac{a_0^3H_0^2\Omega_M}{4}\,\frac{1}{k^2a(\eta)}\,\left(\cos k\eta - \frac{\sin k\eta}{k\eta}\right) \qquad (10.57)$$

При $k\eta >> 1$ (глубоко под горизонтом)

$$h(\eta) = -3h_{(i)}\frac{a_0^3H_0^2\Omega_M}{4}\,\frac{1}{k^2a(\eta)}\,\cos k\eta \qquad (10.58)$$

что соответствует (10.37) и (10.39).

Это решение универсально верно при всех η после входа моды под горизонт, так как амплитуда универсально падает как $1/a$ (см. грубую оценку выше)! Фаза колебания фиксирована!

Скалярные возмущения – однокомпонентные среды

Формализм описывает возмущения той компоненты, которая доминирует.

Уравнения Эйнштейна для скалярных мод, однокомпонентная среда (см. (9.141)–(9.143))

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = 4\pi Ga^2\delta\rho \qquad (10.59)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi Ga^2[(\rho + p)v] \qquad (10.60)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\,\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi Ga^2\delta p \qquad (10.61)$$

Для однокомпонентной среды уравнения сохранения следуют из (10.59)–(10.61).

(10.59) в импульсном представлении:

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi Ga^2\delta\rho \qquad (10.62)$$

Уравнение состояния: $\delta p = u_s^2\delta\rho$

$(10.62) + (10.61) \times u_s^2$:

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1+u_s^2)\Phi' + \left[2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}(1 - 3u_s^2)\right]\Phi + u_s^2k^2\Phi = 0 \qquad (10.63)$$

Уравнение Фридмана:

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi}{3} G\rho \tag{10.64}$$

Уравнения фоновой метрики для (i,j)-компонент (см. (8.89)):

$$2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi G p \Rightarrow \tag{10.65}$$

$$\left[2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}(1 - 3u_s^2)\right] = -8\pi G a^2 (p - u_s^2 \rho) \tag{10.66}$$

Считаем $p = u_s^2 \rho$, тогда $[\dots]$ исчезает

$$\boxed{\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1 + u_s^2)\Phi' + u_s^2 k^2 \Phi = 0} \tag{10.67}$$

Скалярные моды за горизонтом

$$k \ll \frac{a'}{a} \Rightarrow \tag{10.68}$$

последним слагаемым в (10.67) пренебрегаем

$$\boxed{\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1 + u_s^2)\Phi' = 0} \tag{10.69}$$

Имеется константное решение

$$\Phi = \Phi_{(i)} = \mathrm{const} \tag{10.70}$$

и есть падающая мода

$$\Phi(\eta) = \mathrm{const} \int_\eta^\infty \frac{d\eta}{a^{3(1+u_s^2)}(\eta)} \tag{10.71}$$

Предполагаем, как обычно, что падающей моды нет.

Ищем

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} \tag{10.72}$$

Из (10.62), за горизонтом для константной моды

$$3\,\frac{a'^2}{a^2}\Phi_{(i)} = -4\pi G a^2 \delta\rho \tag{10.73}$$

Из уравнения Фридмана

$$\frac{a'^2}{a^2} = \frac{8\pi}{3} a^2 G\rho \tag{10.74}$$

Подставляем в (10.73) $\Rightarrow$

$$\boxed{\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = -2\Phi_{(i)} = \mathrm{const}} \tag{10.75}$$

Скорости, соответствующие скалярной моде v: $v_j = \partial_j v$

Из (10.60) потенциал скорости

$$v = -\frac{1}{4\pi G a^2(\rho + p)}\,\frac{a'}{a}\Phi \tag{10.76}$$

$$\Phi = \Phi_{(i)} e^{i\mathbf{kx}} \Rightarrow$$

$$v_j = \partial_j v = -\frac{1}{4\pi G(\rho+p)} \frac{a'}{a^2} \frac{1}{a} i k_j e^{i\mathbf{kx}} \sim$$

$$\sim \frac{1}{4\pi G(\rho+p)} Hq = \frac{1}{4\pi G(\rho+p)} H^2 \frac{q}{H} \sim \frac{q}{H} \ll 1 \tag{10.77}$$

Скалярные моды под горизонтом: УР вещество

$$w = u_s^2 = 1/3 \tag{10.78}$$

Из (10.67)

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\left(1+u_s^2\right) + u_s^2 k^2 \Phi = 0;\ \ \frac{a'}{a} = \frac{1}{\eta} \Rightarrow \tag{10.79}$$

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta} + u_s^2 k^2 \Phi = 0 \tag{10.80}$$

Сводится к уравнению для сферической функции Бесселя 1-го порядка (см. (10.51)). Решение:

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k\eta)^2} \left[\cos(u_s k\eta) - \frac{\sin(u_s k\eta)}{u_s k\eta}\right] \tag{10.81}$$

$$\Phi(\eta \to 0) = \Phi_{(i)} \tag{10.82}$$

Звуковой горизонт:

$$l_s = u_s \cdot \frac{1}{H} \tag{10.83}$$

Далеко под звуковым горизонтом ($u_s k\eta \gg 1$) имеется падающая волна с определенной фазой:

$$\Phi(\eta) = -3\Phi_{(i)} \frac{1}{(u_s k\eta)^2} \cos(u_s k\eta) \tag{10.84}$$

Ищем $\delta = \delta\rho/\rho$ глубоко под (звуковым) горизонтом. Из (10.62)

$$\left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' = -4\pi G a^2 \delta\rho \tag{10.85}$$

Покажем, что слева существенен только член $k^2\Phi$.

$$\begin{aligned}
&\eta^2 \left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = \\
&= \eta^2 \left(k^2 + \frac{3}{\eta^2}\right)\left(-3\Phi_{(i)} \cos(u_s k\eta) \frac{1}{(u_s k\eta)^2}\right) = \\
&= \left(\eta^2 k^2 + 3\right)\left(-3\Phi_{(i)} \cos(u_s k\eta) \frac{1}{(u_s k\eta)^2}\right) = \\
&= \backslash u_s k\eta \gg 1 \backslash \approx \\
&\approx \eta^2 k^2 \left(-3\Phi_{(i)} \cos(u_s k\eta) \frac{1}{(u_s k\eta)^2}\right) \sim \Phi_{(i)}
\end{aligned} \tag{10.86}$$

$$\eta^2 3 \frac{a'}{a}\Phi' \cong \frac{9\Phi_{(i)}}{u_s k\eta} \sin(u_s k\eta) \sim \frac{1}{u_s k\eta}\Phi_{(i)} \tag{10.87}$$

$$\Phi_{(i)} \gg \frac{1}{u_s k\eta}\Phi_{(i)} \tag{10.88}$$

$$\delta\rho = -\frac{1}{4\pi G}\frac{k^2}{a^2}\Phi(\eta) =$$
$$= \frac{3\Phi_{(i)}}{4\pi G}\frac{1}{u_s^2}\frac{1}{a^2\eta^2}\cos(u_s k\eta) = \left\backslash \frac{1}{a^2\eta^2} = H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \right\backslash =$$
$$= 6\Phi_i\rho\cos(u_s k\eta) \Rightarrow \quad (10.89)$$

$$\boxed{\delta_{rad} = \frac{\delta\rho_{rad}}{\rho} = 6\Phi_{(i)}\cos(u_s k\eta)} \quad (10.90)$$

Возмущения плотности релятивистского вещества под горизонтом испытывают акустические осцилляции.
Амплитуда не растет и не убывает – Джинсовской неустойчивости нет.

Возмущение скорости релятивистской материи

Исходим из (10.60) [доминирует УР материя ⇒ УР стадия]:

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2(\rho + p)v \quad (10.91)$$

$$\frac{a'^2}{a^4} = \frac{8\pi}{3}G\rho;\ \frac{a'}{a^2} = \frac{1}{a\eta};\ p = \frac{1}{3}\rho \Rightarrow \quad (10.92)$$

$$a^2(p+\rho) = \frac{1}{\eta^2}\frac{1}{2\pi G}\ \bigstar \quad (10.93)$$

Подставляем $\Phi_{(i)}$ (10.81) и (10.93) в (10.60) и получаем:

$$kv = \frac{3\Phi_{(i)}}{u_s}\left[\frac{\sin(u_s k\eta)}{(u_s k\eta)^2} - \frac{\cos(u_s k\eta)}{u_s k\eta} - \frac{1}{2}\sin(u_s k\eta)\right] \quad (10.94)$$

v – потенциал скорости: $v_i = ik_i v = \partial_i v$; kv – «физическая скорость».

Для мод глубоко под (акустическим) горизонтом ($u_s k\eta \gg 1$)

$$\boxed{kv = -\frac{3\Phi_{(i)}}{2u_s}\sin(u_s k\eta)} \quad (10.95)$$

– акустические осцилляции.

Ср. (10.90) и (10.95) – фазы сдвинуты на $\pi/2$.

Нерелятивистское вещество (под и за гаризонтом)

(10.67):

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}(1+u_s^2)\Phi' + u_s^2 k^2\Phi = 0 \quad (10.96)$$

$p = 0$; $u_s = 0$ ⇒ все моды находятся за *звуковым горизонтом.*
Все, что остается от уравнения и за горизонтом, и под горизонтом (падающую моду исключаем):

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' = 0 \Rightarrow \Phi(\eta) = \Phi = \text{const} \quad (10.97)$$

Начальные данные – константная мода,
она для потенциала и сохраняется. ⇒
• В линейном режиме возмущения потенциалов скалярной моды НР вещества не меняются.

Плотность (стадия ДМ - автоматически из-за однокомпонентности!)

(10.62):

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho \qquad (10.98)$$

$\Phi' = 0 \Rightarrow$

$$\left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho \Rightarrow \qquad (10.99)$$

$$\delta\rho = -\frac{1}{4\pi G a^2}\left(k^2 + 3\frac{a'^2}{a^2}\right) = \\ = \backslash a = \text{const}\,\eta^2 \Rightarrow a'/a = 2/\eta \backslash = \\ = -\frac{1}{4\pi G a^2}\left(k^2 + \frac{12}{\eta^2}\right)\Phi \qquad (10.100)$$

$$\boxed{\delta\rho = -\frac{1}{4\pi G a^2}\left(k^2 + \frac{12}{\eta^2}\right)\Phi} \qquad (10.101)$$

За горизонтом

$\frac{1}{k} \gg \eta \Rightarrow k^2 \ll 1/\eta^2 \Rightarrow$
$12/\eta^2$ доминирует $\Rightarrow$
$\delta\rho \propto 1/a^3$.
Но $\rho \propto 1/a^3 \Rightarrow \delta = \delta\rho/\rho = \text{const}$

$$H = \frac{a'}{a^2} = \frac{2}{a\eta} \qquad (10.102)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \Rightarrow \rho = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{2}{a\eta}\right)^2 \Rightarrow \qquad (10.103)$$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = -2\Phi \qquad (10.104)$$

$$\boxed{\delta = \delta_{(i)} = -2\Phi_{(i)} = \text{const} - \text{за горизонтом}} \qquad (10.105)$$

Для мод за горизонтом для нерелятивистского вещества Джинсовская неустойчивость не развивается.

Под горизонтом

$k\eta \gg 1 \Rightarrow k^2 \gg 1/\eta^2 \Rightarrow$

$$\delta\rho = -\frac{1}{4\pi G a^2}k^2\Phi = +\frac{1}{8\pi G a^2}k^2\delta_{(i)} \qquad (10.106)$$

Уже видно, что δ будет расти пропорционально $a \Rightarrow$ джинсовская неустойчивость. Найдем, как:

$$\rho = \frac{3}{8\pi G}H^2 \qquad (10.107)$$

$$\delta = \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{1}{3}\frac{k^2}{a^2}\frac{1}{H^2}\delta_{(i)} = \frac{1}{3}\frac{q^2}{H^2}\delta_{(i)} \qquad (10.108)$$

В момент входа под горизонт $q_\times = H_\times$, из (10.108) $\Rightarrow$

$$\delta_\times = \frac{1}{3}\delta_{(i)} \qquad (10.109)$$

$$H^2 = \left(\frac{2}{a\eta}\right)^2 \Rightarrow \qquad (10.110)$$

$$
\begin{aligned}
\delta &= \frac{1}{3}\frac{k^2}{a^2}\frac{a^2\eta^2}{4}\delta_{(i)} = \frac{1}{12}k^2\eta^2\delta_{(i)} = \\
&= \Bigg\backslash \eta^2 = \frac{a}{\text{const}} \Bigg\backslash = \frac{1}{12}k^2\frac{a}{\text{const}}\delta_{(i)}
\end{aligned} \tag{10.111}
$$

$$
\frac{1}{12}k^2\frac{a_\times(k)}{\text{const}}\delta_{(i)} = \delta_\times = \frac{1}{3}\delta_{(i)} \tag{10.112}
$$

$$
\text{const} = \frac{1}{4}k^2 a_\times(k) \tag{10.113}
$$

$$
\boxed{\delta(\eta) = \frac{1}{3}\frac{a(\eta)}{a_\times}\delta_{(i)},\ \ k\eta \gg 1} \tag{10.114}
$$

Амплитуда моды растет со временем – неустойчивость Джинса. Чем позднее мода входит под горизонт, тем меньше успевает вырасти к моменту η

Какие моды привели к образованию наблюдаемых структур?

Рассмотрим все моды, вошедшие под горизонт на МД-стадии.
Самая короткая среди них – вошедшая под горизонт в момент q_{eq}
Координатный импульс (волновое число) моды определяется

$$
k_{eq}\eta_{eq} \sim 1 \tag{10.115}
$$

Длина волны сейчас:

$$
\frac{k_{eq}}{a_0}(a_0\eta_{eq}) = q_{eq}(a_0\eta_{eq}) = \frac{2\pi}{\lambda_{eq}}(a_0\eta_{eq}) \sim 1 \Rightarrow \tag{10.116}
$$

$$
\lambda_{eq} \sim 2\pi(a_0\eta_{eq}) = 2\pi \times 120\,\text{Мпк} \approx 750\,\text{Мпк} \tag{10.117}
$$

$$
\delta = \frac{1}{3}(1+z_{eq})\delta_{(i)} \tag{10.118}
$$

$$
\delta_{(i)} \sim 3\cdot 10^{-5},\ \ z_{eq} \approx 3000 \Rightarrow \delta \sim 0.03 \tag{10.119}
$$

Моды, вошедшие под горизонт на МД-стадии не вошли в нелинейный режим $\Rightarrow$
Вселенная на масштабах 750 Мпк и более – заведомо однородна.

Существующие структуры определяются модами, вошедшими под горизонт раньше – на РД-статдии.

Скорости

(10.60):

$$
\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2(\rho + p)v \tag{10.120}
$$

$\Phi' = 0,\ \ p = 0 \Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
v &= -\frac{a'}{a}\Phi\frac{1}{4\pi G a^2}\frac{1}{\rho} = \\
&= \Bigg\backslash \frac{8\pi}{3}G\rho = H^2 = \left(\frac{2}{a\eta}\right)^2,\ \ \frac{a'}{a} = \frac{2}{\eta} \Bigg\backslash = \\
&= -\frac{1}{3}\Phi\eta
\end{aligned} \tag{10.121}
$$

$$
\boxed{kv = -\frac{\Phi}{3}k\eta} \tag{10.122}
$$

Моды за горизонтом $k\eta \ll 1 \Rightarrow kv \ll \Phi$
Под горизонтом скорости растут $kv \propto \eta \propto \sqrt{a}$
При всех масштабах, т.к. $u_s = 0$

Нерелятивистское вещество на Λ-доминированной стадии

$$(8.93): \quad a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta}, \; H_{dS}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda \qquad (10.123)$$

Λ создает давление, но не создает возмущения давления!

Потенциал Φ.
Из (10.61):

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\,\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p_{tot} \qquad (10.124)$$

$\delta p_{tot} = 0$. Подставляем (10.123):

$$\Phi'' - \frac{3}{\eta}\Phi' + \frac{3}{\eta^2}\Phi = 0 \qquad (10.125)$$

Два типа решений:

$$\Phi(\eta) = \mathrm{const}\cdot\eta \propto \frac{1}{a} \qquad (10.126)$$

$$\Phi(\eta) = \mathrm{const}\cdot\eta^3 \propto \frac{1}{a^3} \qquad (10.127)$$

Падает!

Плотность

(10.62):

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho \qquad (10.128)$$

Подставляем (10.126), пренебрегаем (10.127), используем $a'/a = -1/\eta$
(два последних слагаемых слева в (10.128) сокращаются)

$$k^2\Phi = -4\pi G a^2 \delta\rho \Rightarrow \delta\rho = -\frac{k^2\Phi}{4\pi G a^2} \qquad (10.129)$$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} \propto \frac{\Phi}{a^2}\cdot a^3 \propto \frac{1}{a^3}\times a^3 = 1 \text{ (не растут)} \qquad (10.130)$$

Структуры большего масштаба, чем наблюдаются сейчас, не появятся никогда.

Первичные скалярные возмущения в многокомпонентной Вселенной

Основные уравнения для возмущений в импульсном представлении

Линеаризованные уравнения Эйнштейна (9.141)–(9.143), переписаны с учетом нескольких компонент материи λ :

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\Phi' + 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = -4\pi G a^2 \sum_\lambda \delta\rho_\lambda \qquad (10.131)$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2 \sum_\lambda (\rho_\lambda + p_\lambda) v_\lambda \qquad (10.132)$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \sum_\lambda \delta p_\lambda \qquad (10.133)$$

Линеаризованный закон сохранения ТЭИ:

$$\delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) - (\rho_\lambda + p_\lambda)(k^2 v_\lambda + 3\Phi') = 0 \qquad (10.134)$$

$$[(\rho_\lambda + p_\lambda)]' + 4\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda + \delta p_\lambda + (\rho_\lambda + p_\lambda)\Phi = 0 \qquad (10.135)$$

До рекомбинации:
- Барион-электрон-фотонная среда $\lambda = B\gamma$
- Темная материя: $\lambda = CDM$.
- Нейтрино (лептоны): $\lambda = L$

Обозначения и связи:

$$\delta_\lambda = \delta\rho_\lambda/\rho_\lambda \qquad (10.136)$$

$$\delta p_\lambda = u^2_{s,\lambda}\delta\rho_\lambda \qquad (10.137)$$

$$p_\lambda = w_\lambda \rho_\lambda \qquad (10.138)$$

Уравнения (10.134) и (10.135) в терминах $\delta_\lambda, w_\lambda, u^2_{s,\lambda}$ ★:

$$\delta'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(u^2_{s,\lambda} - w_\lambda)\delta_\lambda - (1 + w_\lambda)k^2 v_\lambda = 3(1 + w_\lambda)\Phi' \qquad (10.139)$$

$$[(1+w_\lambda)v_\lambda]' + \frac{a'}{a}(1-3w_\lambda)(1+w_\lambda)v_\lambda + u^2_{s,\lambda}\delta_\lambda = -(1+w_\lambda)\Phi \qquad (10.140)$$

Адиабатическая мода и мода постоянной кривизны

Контекст:

- Начальные условия для возмущений ставятся глубоко за горизонтом.
- Интерес представляют моды, отвечающие за анизотропию CMB и за рост структур вещества.
- Такие моды находятся за горизонтом для $T \sim 100$ кэВ:
  - барионы и электроны нерелятивистткие
  - CDM нерелятивистская
  - нейтрино (~ 1 МэВ) и CDM (> 0.05 ГэВ) заморожены, не взаимодействуют с барион-электрон-фотонной плазмой

Основные параметры космической плазмы:
• n_B, n_{CDM}, n_L
• T (или $s \propto T^3$)

• Вообще говоря, имеют место возмущения температуры, плотности и состава среды вместе.
• Если возмущения малы (линейный режим), то можно разделить на две линейно-независмые компоненты:
- Возмущения плотности (температуры) – отдельно;
- Возмущения состава – отдельно.

Возмущения плотности – *адиабатическая мода*

Релятивистское вещество имеет ненулевые возмущения плотности энергии (температуры), но относительные величины, характеризующие барионную асимметрию, плотность темной материи и плотность лептонных не зависят от координат:

$$\delta\left(\frac{n_B}{s}\right) = \delta\left(\frac{n_{CDM}}{s}\right) = \delta\left(\frac{n_L}{s}\right) = 0 \qquad (10.141)$$

Возмущения состава – *моды постоянной кривизны*

Глубоко на РД-стадии возмущения плотности релятивистского вещества отсутсвуют, но:
• Неоднородность барионного числа → барионная мода постоянной кривизны
• Неоднородность плотности темной материи → CDM-мода постоянной кривизны
• Неоднородность лептонного числа → лептонная мода постоянной кривизны
(при прочих фоновых концентрациях)

Кривизна постоянна потому, что изменения концентраций рассматриваются на фоне постоянной полной плотности энергии.

Общее определение: для мод постоянной кривизны за горизонтом возмущение гравитационных потенциалов отсутствует.

Наблюдения показывают: вклад мод постоянной кривизны мал.