Лекция 9

Джинсовская неустойчивость. Космологические возмущения: скалярные, векторные, тензорные моды. Линеаризованные уравнения. Моды за и под горизонтом.

Космологические возмущения

Джинсовская неустойчивость

Ньютоновская гравитация + классическая гидродинамика нерелятивистсткой идеальной жидкости.

Гравитационный потенциал:

$$\boxed{\Delta\varphi = 4\pi G\rho} \tag{9.1}$$

Уравнение неразрывности:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0} \tag{9.2}$$

Уравнение Эйлера для идеальной жидкости:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho\nabla\varphi - \nabla p \bigstar \tag{9.3}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \Rightarrow \tag{9.4}$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\rho\nabla\varphi - \nabla p} \tag{9.5}$$

Начальные условия – бесконечная однородная статическая среда:

$$\rho(\mathbf{x}) = \mathrm{const},\ p(\mathbf{x}) = \mathrm{const},\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0,\ \varphi(\mathbf{x}) = 0 \tag{9.6}$$

[Заведомо нереалистично, т.к. $\Delta\varphi = 4\pi G\rho \neq 0$]

Изучаем малые возмущения.
Линеаризованные уравнения:
Из (9.1):

$$\Delta(\varphi + \delta\varphi) = 4\pi G(\rho + \delta\rho) \Rightarrow \tag{9.7}$$

$$\boxed{\Delta\delta\varphi = 4\pi G\delta\rho} \tag{9.8}$$

Из (9.2):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\rho + \delta\rho) + \nabla[(\rho + \delta\rho)(\mathbf{v} + \delta\mathbf{v})] = \\ &\quad = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v} + \delta\rho\mathbf{v} + \rho\delta\mathbf{v} + \delta\rho\delta\mathbf{v}) = \\ &= \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v})\right] + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\delta\mathbf{v}) = \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\nabla\delta\mathbf{v} \Rightarrow \end{aligned} \tag{9.9}$$

$$\boxed{\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\nabla\delta\mathbf{v} = 0} \tag{9.10}$$

Из (9.5):

$$\rho(\delta\mathbf{v}\nabla)\delta\mathbf{v} \simeq 0 - \text{2-й порядок малости} \tag{9.11}$$

$$\boxed{\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\delta p - \nabla\delta\varphi} \tag{9.12}$$

Уравнение состояния: $p = p(\rho)$

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial\rho}\delta\rho \equiv u_s^2\delta\rho \tag{9.13}$$

Из (9.10), подставляя $\partial\delta\mathbf{v}/\partial t$ из (9.12)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}+\rho\nabla\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t}=\\
&=\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}+\rho\nabla\left(-\frac{1}{\rho}\nabla\delta p-\nabla\delta\varphi\right)=\Big\backslash\nabla\delta p=\nabla\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\delta\rho\right)\Big\backslash=\\
&=\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}+\rho\nabla\left(-\frac{1}{\rho}u_s^2\nabla\delta\rho\right)-4\pi\rho G\delta\rho=\\
&=\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}-u_s^2\Delta\delta\rho-4\pi G\rho\delta\rho=0
\end{aligned}\tag{9.14}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}-u_s^2\Delta\delta\rho-4\pi G\rho\delta\rho=0}\tag{9.15}$$

[Если $G=0$, то простое волновое уравнение]

Ищем решения в виде малых линейных волн:

$$\delta\rho(\mathbf{x},t)=\int d^3q\,e^{i[\mathbf{qx}-\omega(\mathbf{q})t]}\delta\rho(\mathbf{q})=\int d^3q\,e^{i\mathbf{qx}}\delta\rho(\mathbf{q},t)\tag{9.16}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\delta\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}&=\int[-\omega^2(\mathbf{q})]d^3qe^{i[\mathbf{qx}-\omega(\mathbf{q})t]}\delta\rho(\mathbf{q})\\
\Delta\delta\rho(\mathbf{x},t)&=\int(-q^2)d^3qe^{i[\mathbf{qx}-\omega(\mathbf{q})t]}\delta\rho(\mathbf{q})
\end{aligned}\tag{9.17}$$

Подставляем в (9.15):

$$\int[-\omega^2(\mathbf{q})+u_s^2q^2-4\pi G\rho]e^{i(\mathbf{qx}-\omega t)}\delta\rho(\mathbf{q})d^3q=0\tag{9.18}$$

$\Rightarrow$ Закон дисперсии

$$\omega^2(\mathbf{q})=\omega^2(q)=u_s^2q^2-4\pi G\rho\tag{9.19}$$

Джинсовский «импульс» (волновое число) и длина волны

$$q_J=\sqrt{\frac{4\pi G\rho}{u_s^2}};\quad\lambda_J=\frac{2\pi}{q_J}\tag{9.20}$$

$$\lambda<\lambda_J\Rightarrow\omega^2(q)>0,\ \text{волна}\tag{9.21}$$

$$\lambda<\lambda_J\Rightarrow\text{волновых решений нет}\tag{9.22}$$

$$\omega(q)=\pm i\sqrt{4\pi G\rho-u_s^2q^2}=\pm\Omega_q,\ \Omega_q>0\tag{9.23}$$

$$\delta\rho(q,t)=\delta\rho(q,0)e^{\pm\Omega_q t}\tag{9.24}$$

Экспоненциально растущее и экспоненциально падающее решения –
гравитационная неустойчивость Джинса.

Если $u_s=0$ (пыль) то колебательных решний нет совсем.

Линейный и нелинейный режимы:

$$\delta(\mathbf{q},t)\equiv\frac{\delta\rho(\mathbf{q},t)}{\rho}\tag{9.25}$$

Если $\delta(\mathbf{q},t)\ll 1$ работает линейный анализ (представление Фурье).

Время входа в нелинейный режим определеяется условием

$$\delta(\mathbf{q},t_{nl})\sim 1\tag{9.26}$$

Теория неустойчивости Джинса – прообраз теории космологических возмущений.

Возмущения метрики и фиксация калибровки $h_{0i}=0$

<u>Задача:</u> Пусть на какой-то стадии эволюции Вселенной (возможно, весьма ранней) но после горячего Большого взрыва, над фоном Фридмановского пространства имеются малые возмущения вещества (и, следовательно, метрики). Что с ними станет по мере дальнейшей эволюции Вселенной?

$$ds^2 = a^2(\eta)\gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{9.27}$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{9.28}$$

$\eta_{\mu\nu}$ – Минковский, $h_{\mu\nu}$ – возмущение.
<u>Соглашение:</u> Индексы *возмущений* будем поднимать/опускать метрикой Минковского:

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}h_{\rho\lambda} \text{ и т.д.} \tag{9.29}$$

Если $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, то $\gamma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ ($\bigstar$)

Теория инвариантна относительно калибровочных преобразований – произвольных диффеоморфизмов. Рассматриваем произвольные инфинитеземальные преобразования

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x),\ \ \xi^\mu \sim h^{\alpha\beta} \tag{9.30}$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \nabla^\mu\xi^\nu + \nabla^\nu\xi^\mu\ \bigstar \tag{9.31}$$

Как преобразуются $h^{\mu\nu}$? Используем (9.31):

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2}(\eta^{\mu\nu} - \tilde{h}^{\mu\nu}) = \\ = \frac{1}{a^2}(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) + g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda\xi^\nu + g^{\nu\lambda}\nabla_\lambda\xi^\mu \tag{9.32}$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\nu - (\eta^{\nu\lambda} - h^{\nu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\mu \tag{9.33}$$

$$(\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\nu \simeq \eta^{\mu\lambda}\nabla_\lambda\xi^\nu = \eta^{\mu\lambda}(\partial_\lambda\xi^\nu + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\xi^\sigma) = \\ = \partial^\mu\xi^\nu + \eta^{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\xi^\sigma \tag{9.34}$$

$\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}$ достаточно считать в 0-порядке:

$$\Gamma^\nu_{\sigma\lambda} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\partial_\sigma g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\sigma\lambda}) = \\ = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\eta^{\nu\rho}[\partial_\sigma(a^2\eta_{\lambda\rho}) + \partial_\lambda(a^2\eta_{\rho\sigma}) - \partial_\rho(a^2\eta_{\sigma\lambda})] = \\ = \frac{1}{a}(\partial_\sigma a\,\delta^\nu_\lambda + \partial_\lambda a\,\delta^\nu_\sigma - \partial_\rho a\,\eta^{\nu\rho}\eta_{\sigma\lambda}) \tag{9.35}$$

$$\eta^{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\xi^\sigma = \frac{1}{a}(\partial_\sigma a\,\xi^\sigma\eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda a\,\eta^{\mu\lambda}\xi^\nu - \partial_\rho a\,\eta^{\nu\rho}\xi^\mu) \tag{9.36}$$

$$(\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\nu = \\ = \partial^\mu\xi^\nu + \frac{1}{a}(\partial_\sigma a\,\xi^\sigma\eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda a\eta^{\mu\lambda}\xi^\nu - \partial_\rho a\eta^{\nu\rho}\xi^\mu) \tag{9.37}$$

$$(\eta^{\nu\lambda} - h^{\nu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\mu = \\ = \partial^\nu\xi^\mu + \frac{1}{a}(\partial_\sigma a\,\xi^\sigma\eta^{\nu\mu} + \partial_\lambda a\eta^{\nu\lambda}\xi^\mu - \partial_\rho a\eta^{\mu\rho}\xi^\nu) \tag{9.38}$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu\xi^\nu - \partial^\nu\xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu}\xi^\sigma\frac{\partial_\sigma a}{a} \tag{9.39}$$

Так как ξ^μ есть 4 произвольные функции, то их выбираем так, чтобы занулить 3 величины $h_{i0}=0,\ i=1,2,3$.

Остается еще остаточная инвариантность для преобразований (так как не меняются $0i$-компоненты)

$$\partial_0\xi_i + \partial_i\xi_0 = 0 \tag{9.40}$$

Годится, в частности

$$\xi_i = \xi_i(\mathbf{x}),\ \xi_0 = 0 \tag{9.41}$$

В калибровке $h_{i0} = 0$:

$$\boxed{ds^2 = a^2(\eta)[(1+h_{00})d\eta^2 - (\delta_{ik}+h_{ik})dx_i dx_k].} \tag{9.42}$$

<u>Соглашение:</u> для трехмерных индексов возмущений, они опускаются трехмерной метрикой δ_{ij}

$$v_i = \delta_{ij}v^j = v^i \tag{9.43}$$

Для наблюдателя, покоящегося в сопутствующей системе, $dx_i = 0 \Rightarrow$

$$ds^2 = d\tau^2 = a^2(\eta)(1+h_{00})d\eta^2 \Rightarrow \tag{9.44}$$

$$d\tau = a(\eta)(1+\frac{1}{2}h_{00})d\eta \tag{9.45}$$

Возмущения тензора энергии-импульса

ТЭИ идеальной жидкости:

$$T^\mu_\nu = (\rho+p)u^\mu u_\nu - \delta^\mu_\nu p \tag{9.46}$$

С возмущениями:

$$T^\mu_\nu = (\rho+\delta\rho+p+\delta p)(u^\mu+\delta u^\mu)(u_\nu+\delta u_\nu) - \delta^\mu_\nu(p+\delta p) \tag{9.47}$$

<u>*Скорость в контексте космологических возмущений*</u>

Невозмущенная (координатная) скорость имеет только 0-компоненту: $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1 \Rightarrow a^2\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = a^2 u^0 u^0 = 1 \Rightarrow$$
$$u^0 = \frac{1}{a}; \quad u_0 u^0 = 1 \Rightarrow u_0 = a \tag{9.48}$$

Физические скорости:

$$dX^\mu = a dx^\mu \Rightarrow V^\mu = \frac{dX^\mu}{ds} = a\frac{dx^\mu}{ds} = au^\mu \tag{9.49}$$

$$V^0 = au^0 = 1; \quad V^i = au^i = 0; \tag{9.50}$$

Возмущенная скорость:

$$\hat{V}^0 = V^0 + v^0 = 1 + v^0 \tag{9.51}$$

$$\hat{V}^i = V^i + v^i = v^i - \text{физическая скорость} \tag{9.52}$$

v^0 и v^i – величины первого порядка малости.

$$\hat{V}^\mu = a\hat{u}^\mu \tag{9.53}$$

$$\hat{u}^0 \equiv u^0 + \delta u^0 = \frac{1}{a}(1+v^0) \tag{9.54}$$

$$\hat{u}^i \equiv u^i + \delta u^i \equiv \delta u^i = \frac{1}{a}v^i \tag{9.55}$$

Тогда

$$1 = g_{\mu\nu}\hat{u}^\mu\hat{u}^\nu = a^2[(\eta_{00}+h_{00})\hat{u}^0\hat{u}^0 - (\delta_{ij}+h_{ij})\hat{u}^i\hat{u}^j] =$$
$$= a^2(1+h_{00})\frac{1}{a^2}(1+v^0)^2 - (\delta_{ij}+h_{ij})\delta u^i\delta u^j \cong$$
$$\cong (1+h_{00})(1+v^0)^2 \cong 1 + h_{00} + 2v^0 \Rightarrow \tag{9.56}$$

$$\boxed{v^0 = -\frac{1}{2}h_{00}} \tag{9.57}$$

В линейном порядке это есть гравитационное замедление времени. Даже если $v^i = 0$ время замедляется.

$$\boxed{v^i \text{ могут быть любыми (малыми)}} \tag{9.58}$$

u_μ и δu_μ (с нижними индексами):

$$\hat{u}_\mu \hat{u}^\mu = (u_0 + \delta u_0)(u^0 + \delta u^0) + \delta u_i \delta u^i \cong$$
$$\cong (u_0 + \delta u_0)(u^0 + \delta u^0) = 1 \Rightarrow \tag{9.59}$$

$$u_0 + \delta u_0 = \frac{1}{u^0 + \delta u^0} = a(1 - v^0) \tag{9.60}$$

$$\delta u_i = g_{i\mu}\delta u^\mu \cong a^2 \eta_{i\mu}\delta u^\mu = -a^2 \delta u^i = -a^2 \frac{1}{a} v^i = -a v^i \tag{9.61}$$

$$\boxed{u_0 + \delta u_0 = a(1 - v^0)} \tag{9.62}$$

$$\boxed{\delta u_i = -a v_i} \tag{9.63}$$

<u>*Компоненты ТЭИ*</u>

Из (9.47)

$$T^\mu_\nu = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)(u^\mu + \delta u^\mu)(u_\nu + \delta u_\nu) - \delta^\mu_\nu (p + \delta p) \Rightarrow \tag{9.64}$$

$$T^0_0 = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)\frac{1}{a}(1 + v_0) a (1 - v_0) - \delta^0_0 (p + \delta p) \cong$$
$$\cong \rho + \delta\rho \;\Rightarrow \tag{9.65}$$

$$\boxed{\delta T^0_0 = \delta\rho} \tag{9.66}$$

$$T^0_i = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)\frac{1}{a}(1 + v_0)(-a v_i) - \delta^0_i (p + \delta p) \cong$$
$$\cong (\rho + p + \delta\rho + \delta p)(-v_i) \cong -(\rho + p) v_i \Rightarrow \tag{9.67}$$

$$\boxed{\delta T^0_i = -(\rho + p) v_i} \tag{9.68}$$

$$T^i_j = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)\frac{1}{a} v^i (-a v_j) - \delta^i_j (p + \delta p) \cong$$
$$\cong -\delta^i_j p - \delta^i_j \delta p \Rightarrow \tag{9.69}$$

$$\boxed{\delta T^i_j = -\delta^i_j \delta p} \tag{9.70}$$

Потребуются, когда будем выписывать линеаризованные уравнения для возмущений.

Разложение возмущений по спиральностям: скалярные, векторные, тензорные моды

Так как все уравнения пишутся в линейном порядке по возмущениям, то разные компоненты Фурье можно изучать отдельно:

$$h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{x}) = \int d^3k\, e^{i\mathbf{kx}} h_{\mu\nu}(\eta, \mathbf{k}) \qquad (9.71)$$

и т.д. для $\delta\rho, \delta p, v_i$. Дифференцирование и умножение на ik для компонент Фурье взаимозаменяемы:

$$\partial_i \leftrightarrow ik_i \qquad (9.72)$$

Для фиксированной моды $\mathbf{k}$ пространство инвариантно относительно вращений вокруг вектора $\mathbf{k}$ – «малая группа $SO(2)$», но тензорные индексы $(h_{ik}, v_i, \delta\rho)$ не инвариантны, преобразуются друг через друга $\Rightarrow$
моды с определенной спиральностью (3 типа).

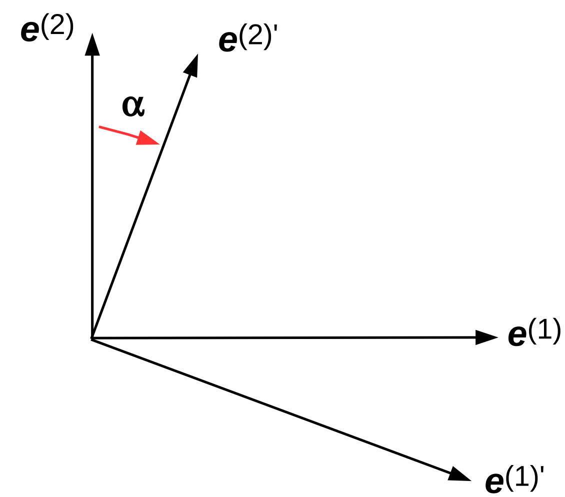
1. Скалярные моды (спиральность 0)

Объект при вращениях малой группы $SO(2)$ не преобразуется.
Типы скалярных мод (4 штуки)

- 3-скаляр $(\delta\rho, \delta p, \dots)$
- Вектор, $||\, \mathbf{k}$
- Тензор, $\propto k_i k_j$ (т.к. k_i, k_j не меняются)
- Тензор, $\propto \delta_{i,j}$

2. Векторные моды (спиральность 1)

Преобразуются как вектор, ортогональный $\mathbf{k}$



$\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}, \mathbf{k}$ – правая тройка.
Поворот по Ч.С. на α

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{(1)'} &= \mathbf{e}^{(1)} \cos\alpha - \mathbf{e}^{(2)} \sin\alpha \\ \mathbf{e}^{(2)'} &= \mathbf{e}^{(1)} \sin\alpha + \mathbf{e}^{(2)} \cos\alpha \end{aligned} \qquad (9.73)$$

$$\mathbf{e}^{\pm} = \mathbf{e}^{(1)} \pm i\mathbf{e}^{(2)} \qquad (9.74)$$

$$\mathbf{e}^{(+)'}(\alpha) = \mathbf{e}^{(1)'}(\alpha) + i\mathbf{e}^{(2)'}(\alpha) = e^{i\alpha}\mathbf{e}^{(+)} \qquad (9.75)$$

$$\hat{L}_\alpha \mathbf{e}^{(+)'}(\alpha) = -i\frac{\partial}{\partial\alpha}(e^{i\alpha}\mathbf{e}^{(+)}) = +1\mathbf{e}^{(+)'}(\alpha) \qquad (9.76)$$

– спиральность $+1$

$$\hat{L}_\alpha \mathbf{e}^{(-)'}(\alpha) = -1\mathbf{e}^{(-)'}(\alpha) \qquad (9.77)$$

– спиральность -1

Поизвольный поперечный вектор является смесью спиральностей -1 и $+1$:

$$\mathbf{S} = \alpha_-\mathbf{e}^{(-)} + \alpha_+\mathbf{e}^{(+)} \tag{9.78}$$

Единичную спиральность имеют (2 типа)

- Поперечные векторы
- Тензоры со структурой $k_i W_j^T$, где W_j^T – поперечный вектор, то есть $k_i W_i^T = 0$

(скалярные моды имеют спиральность 0,
т.к. они не зависят от поворота α)

3. Тензорные моды (спиральность 2),
всего 1 тип

Рассмотрим симметричные, бесследовые, поперечные 3-мерные тензоры:

- $h_{ij} = h_{ji}$ – 3 условия
- $h_{ii} = 0$ – 1 условие
- $k_i h_{ij} = 0$ – поперечность, 3 условия

9 параметров, 7 условий, 2 – свободные $\Rightarrow$
Размерность $= 2$
Из $\mathbf{e}^{(1)}, \mathbf{e}^{(2)}$ построим два тензора:

$$e_{ij}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)}e_j^{(1)} - e_i^{(2)}e_j^{(2)}) \tag{9.79}$$

$$e_{ij}^{(\times)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i^{(1)}e_j^{(2)} + e_i^{(2)}e_j^{(1)}) \tag{9.80}$$

(9.81)

– линейно независимы, симметричны, бесследовы, поперечны по определению.

$$e_{ij}^{(\pm 2)} = e_{ij}^{(+)} \pm i e_{ij}^{(\times)} \tag{9.82}$$

Элементарно проверяется:

$$e_{ij}^{(+2)'}(\alpha) = e^{+2i\alpha}e_{ij}^{(+2)'} \Rightarrow \hat{L}_\alpha e_{ij}^{(+2)'}(\alpha) = +2e_{ij}^{(+2)'} \tag{9.83}$$

$$e_{ij}^{(-2)'}(\alpha) = e^{-2i\alpha}e_{ij}^{(-2)'} \Rightarrow \hat{L}_\alpha e_{ij}^{(-2)'}(\alpha) = -2e_{ij}^{(-2)'} \tag{9.84}$$

– объекты со спиральностью ± 2.

• 4 типа скаляров (спиральность 0), 2 типа векторов (спиральность 1), 1 тип тезоров (спиральность 2) достаточно для разложения по ним всех величин, нужных для теории космологических возмущений (см. след. слайд).

• Дифференцирование компонент Фурье по x_j (умножение на ik_j) не меняет спиральности $\Rightarrow$

> Линеаризованные (и потому линейные) уравнения разбиваются на независимые компоненты для мод разной спиральности.

Моды разной спиральности эволюционируют существенно по-разному!

Разложение h_{ij} и v_i по спиральностям

В калибровке $h_{0i} = 0$

$$h_{\mu\nu} = h_{00} \oplus h_{ij} \tag{9.85}$$

h_{00} не зависит от поворотов в плоскости $(ij) \Rightarrow$

$$h_{00} = 2\Phi - \text{скаляр} \tag{9.86}$$

h_{ij} есть комбинация всех возможных спиральностей:

$$\begin{array}{rcll} h_{ij}(\eta, \mathbf{k}) & = & -2\Psi\delta_{ij} - 2k_i k_j E & \text{спиральность } 0 \\ & & +i(k_i W_j^T + k_j W_i^T) & \text{спиральность } 1 \\ & & +h_{ij}^{TT} & \text{спиральность } 2 \end{array} \tag{9.87}$$

Ψ, E – скалярные моды (2 параметра)
W_j^T – векторные моды (2 параметра)
h_{ij}^{TT} – тензорные моды (2 параметра).

Всего 6 параметров, столько же независимых элементов в симметричной матрице h_{ij}

Разложение для скорости:

$$\begin{array}{rcll} v_i(\eta, \mathbf{k}) & = & ik_i v(\eta, \mathbf{k}) & \text{спиральность } 0 \\ & & +V_i^T(\eta, \mathbf{k}) & \text{спиральность } 1 \end{array} \tag{9.88}$$

v – скалярная мода (1 параметр)
V_i^T – векторные моды (2 параметра)

Всего 3 параметра, столько же независимых компонент вектора v_i

Если под $v(\eta, \mathbf{k})$ понимать всю компоненту Фурье, то

$$ik_i v(\eta, \mathbf{k}) = \partial_i v(\eta, \mathbf{k}) \tag{9.89}$$

поэтому $v(\eta, \mathbf{k})$ иногда называют потенциалом скорости.

Компоненты ТЭИ

Скаляр:

$$\boxed{\delta T_0^0 = \delta\rho} \tag{9.90}$$

Вектор и скаляр (см. (9.88)):

$$\boxed{\delta T_i^0 = -(\rho + p) v_i} \tag{9.91}$$

Скаляр:

$$\boxed{\delta T_j^i = -\delta_j^i \delta p} \tag{9.92}$$

<u>Тензорного вклада нет!</u>

Линеаризованные уравнения для возмущений

Ковариантное сохранение ТЭИ

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = \partial_\mu T^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\mu\lambda} T^\lambda_\nu - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} T^\mu_\lambda = 0 \quad (9.93)$$

$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ считаются в метрике

$$g_{\mu\nu} = a^2(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) \quad (9.94)$$

в калибровке $h_{0i} = 0$ ★

$$\Gamma^0_{00} = \frac{a'}{a} + \frac{1}{2} h'_{00} \quad (9.95)$$

$$\Gamma^0_{0i} = \Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\partial_i h_{00} \quad (9.96)$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{a'}{a}\delta_{ij} - \frac{1}{2} h'_{ij} \quad (9.97)$$

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{a'}{a}(1 - h_{00})\delta_{ij} - \frac{a'}{a} h_{ij} - \frac{1}{2} h'_{ij} \quad (9.98)$$

$$\Gamma^i_{jk} = -\frac{1}{2}(\partial_j h_{ik} + \partial_k h_{ij} - \partial_i h_{jk}) \quad (9.99)$$

Подставляем в (9.93), используем выражения для δT, получаем два уравнения ★:

$$\delta\rho' + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho + \delta p) + (\rho + p)\left(\partial_i v_i - \frac{1}{2} h'\right) = 0 \quad (9.100)$$

$$\partial_i \delta p + (\rho + p)\left(4\frac{a'}{a} v_i + \frac{1}{2}\partial_i h_{00}\right) + [v_i(\rho + p)]' = 0 \quad (9.101)$$

где $h = h_{ii}$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$\delta G^\nu_\mu = 8\pi G \delta T^\mu_\nu \quad (9.102)$$

$$a^2 \delta G^0_0 = -3h_{00}\left(\frac{a'}{a}\right)^2 - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j h_{ij} + \frac{1}{2}\Delta h - \frac{a'}{a} h' \quad (9.103)$$

$$a^2 \delta G^0_i = \frac{1}{2}\partial_i h' - \frac{1}{2}\partial_j h'_{ij} + \frac{a'}{a}\partial_i h_{00} \quad (9.104)$$

$$\begin{aligned} a^2 \delta G^i_j = {} & \frac{1}{2}\partial_i\partial_k h_{jk} + \frac{1}{2}\partial_j\partial_k h_{ik} + \frac{1}{2} h''_{ij} - \frac{1}{2}\Delta h_{ij} + \\ & + \frac{1}{2}\partial_i\partial_j h_{00} - \frac{1}{2}\partial_i\partial_j h + \frac{a'}{a} h'_{ij} - \\ & - \delta^i_j \left[\frac{1}{2} h'' + \frac{1}{2}\Delta h_{00} + \frac{1}{2}\partial_l\partial_k h_{lk} - \frac{1}{2}\Delta h + \right. \\ & \left. + 2\frac{a''}{a} h_{00} - \left(\frac{a'}{a}\right)^2 h_{00} + \frac{a'}{a}(h'_{00} + h')\right] \end{aligned} \quad (9.105)$$

Тензорные моды (Для компонент Фурье!)

В выражениях для δT^μ_ν [идеальная жидкость] (9.66)–(9.70) тензорного вклада нет, поэтому уравнение для тензорных мод однородное (очень просто!) ★:

$$\partial^2_\eta h^{TT}_{ij} - \Delta h^{TT}_{ij} + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta h^{TT}_{ij} = 0 \quad (9.106)$$

Это уравнение для гравитационных волн в пр-ве Фридмана.
В статическом пределе Минковского $\eta \to t$, $a' = 0$ и уравнение переходит в обычное волновое уравнение

$$\partial^2_t h^{TT}_{ij} - \Delta h^{TT}_{ij} = 0 \quad (9.107)$$

Векторные моды

Векторные моды метрического тензора, скорости и ТЭИ

$$h_{ij} = i(k_i W_j^T + k_j W_i^T) = \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T \qquad (9.108)$$

$$v_i = V_i^T; \quad ik_i V_i = \partial_i V_i = 0 \qquad (9.109)$$

$$\delta T_i^0 = -(\rho + p) v_i \qquad (9.110)$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна:

00-компонента удовлетворяется тождественно ★;

$0i$-компоненты

$$\boxed{\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T} \qquad (9.111)$$

ij-компоненты

$$\boxed{\partial_\eta^2 W_i^T + 2\frac{a'}{a}\partial_\eta W_i^T = 0} \qquad (9.112)$$

Откуда в $0i$-компоненте 3-я производная? Получим:

$$\delta G_i^0 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\partial_i h' - \frac{1}{2}\partial_j h'_{ij} + \frac{a'}{a}\partial_i h_{00}\right) = 8\pi G \delta T_i^0 \qquad (9.113)$$

$$h_{00} \equiv 0 \Rightarrow \qquad (9.114)$$

$$\partial_j h'_{ij} - \partial_i h' = a^2 16\pi G (\rho + p) V_i^T \qquad (9.115)$$

$$\partial_j h'_{ij} = \partial_\eta \partial_j (\partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T) = \partial_\eta [\partial_j \partial_i W_j^T + \partial_j \partial_j W_i^T] = = \partial_\eta \partial_j \partial_i W_j^T + \partial_\eta \Delta W_i^T \qquad (9.116)$$

$$\partial_j \partial_i W_j^T = -k_i k_j W_j^T = 0 \text{ (поперечность)} \qquad (9.117)$$

$$h = i2k_j W_j^T = 0 \text{ (поперечность)} \qquad (9.118)$$

$$\partial_\eta \Delta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \qquad (9.119)$$

или

$$-k^2 \partial_\eta W_i^T = 16\pi G a^2 (\rho + p) V_i^T \qquad (9.120)$$

Из ковариантных сохранений нетривиально одно:

$$\boxed{\partial_\eta[(\rho + p) V_i^T] + 4\frac{a'}{a}(\rho + p) V_i^T = 0} \qquad (9.121)$$

Уравнение (9.112) является следствием (9.121) и (9.111).

Однородное уравнение (9.111) ($\rho = 0$) имеет решением любую функцию $\mathbf{x}$, не зависящую от η – это чистая калибровка.
Устраняется преобразованием (см. (9.41)):

$$\xi_i = W_i^T(\mathbf{x}), \ \xi_0 = 0 \qquad (9.122)$$

$$\tilde{h}_{ij} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu} \xi^\lambda \frac{\partial_\lambda a}{a} =$$
$$= \partial_i W_j^T + \partial_j W_i^T - \partial_i W_j^T - \partial_j W_i^T - 2\eta_{ij} W_j^T \frac{\partial_j a}{a} = 0 \qquad (9.123)$$

Векторные моды грав. поля в отстутсвии источников не распространяются.

Скалярные моды,
конформная Ньютонова калибровка

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \partial^\mu \xi^\nu - \partial^\nu \xi^\mu - 2\eta^{\mu\nu}\xi^\lambda \frac{\partial_\lambda a}{a} \qquad (9.124)$$

Используем возможность остаточной калибровки, не нарушающей условия $h_{0i} = 0$ (см. (9.40)):

$$\partial_0 \xi_i + \partial_i \xi_0 = 0 \qquad (9.125)$$

Общий вид такой калибровки:

$$\xi_i = -\partial_i \sigma(\eta, \mathbf{x}),\ \ \xi_0 = \partial_\eta \sigma(\eta, \mathbf{x}) \qquad (9.126)$$

$$\tilde{h}_{ij} = h_{ij} - 2\partial_i\partial_j\sigma - 2\frac{a'}{a}\delta_{ij}\sigma' \qquad (9.127)$$

Общий вид скалярной моды h_{ij}:

$$h_{ij} = -2\Psi\delta_{ij} - 2k_i k_j E \qquad (9.128)$$

В координатном представлении

$$h_{ij} = -2\Psi\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j E \qquad (9.129)$$

$$\tilde{h}_{ij} = -2\Psi\delta_{ij} + 2\partial_i\partial_j E - 2\partial_i\partial_j\sigma - 2\frac{a'}{a}\delta_{ij}\sigma' \qquad (9.130)$$

Подбираем σ:

$$2\partial_i\partial_j\sigma + 2\frac{a'}{a}\delta_{ij}\sigma' = \partial_i\partial_j E \qquad (9.131)$$

Калибровка полностью фиксирована.
Для скалярных мод остается:

$$h_{00} = 2\Phi \qquad (9.132)$$
$$h_{ij} = -2\Psi\delta_{ij} \qquad (9.133)$$
$$v_i = \partial_i v \ [\text{или } ik_i v] \qquad (9.134)$$

Метрика:

$$ds^2 = a^2(\eta)[(1+2\Phi)d\eta^2 - (1+2\Psi)dx^2] \qquad (9.135)$$

В Ньютоновом пределе Φ – гравитационный потенциал

Из (9.103)–(9.105) тензор Эйнштейна для скалярных мод ★:

$$\delta G^0_0 = \frac{2}{a^2}\left(-\Delta\Psi + 3\frac{a'}{a}\Psi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi\right) \qquad (9.136)$$

$$\delta G^0_i = \frac{2}{a^2}\left(-\partial_i\Psi' + \frac{a'}{a}\partial_i\Phi\right) \qquad (9.137)$$

$$\delta G^i_j = \frac{1}{a^2}\partial_i\partial_j(\Phi+\Psi) - \\ - \frac{2}{a^2}\delta_{ij}\left[-\Psi'' + \frac{1}{2}\Delta(\Phi+\Psi) + \frac{a'}{a}(\Phi' - 2\Psi') + \right. \\ \left. +\Phi\left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a}\right)\right] \qquad (9.138)$$

В пространственной части для скалярных мод

$$\delta T^i_j = -\delta^i_j \delta p \qquad (9.139)$$

Нет структуры $\partial_i\partial_j$, которая есть в $\delta G^i_j \Rightarrow$

$$\Phi + \Psi = 0 \Rightarrow \Psi = -\Phi \qquad (9.140)$$

Уравнения Эйнштейна для скалярных мод:

$$\Delta\Phi - 3\frac{a'}{a}\Phi' - 3\frac{a'^2}{a^2}\Phi = 4\pi G a^2 \delta\rho_{tot} \tag{9.141}$$

$$\Phi' + \frac{a'}{a}\Phi = -4\pi G a^2 [(\rho + p)v]_{tot} \tag{9.142}$$

$$\Phi'' + 3\frac{a'}{a}\Phi' + \left(2\frac{a''}{a} - \frac{a'^2}{a^2}\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p_{tot} \tag{9.143}$$

Уравнения ковариантного сохранения ★
(λ – тип материи):

$$\delta\rho'_\lambda + 3\frac{a'}{a}(\delta\rho_\lambda + \delta p_\lambda) + (\rho_\lambda + p_\lambda)(\Delta v_\lambda - 3\Phi') = 0 \tag{9.144}$$

$$[(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda]' + 4\frac{a'}{a}(\rho_\lambda + p_\lambda)v_\lambda + \delta p_\lambda + (\rho_\lambda + p_\lambda)\Phi = 0 \tag{9.145}$$

Не все уравнения (9.141)–(9.145) независимы.

Система не полна: нужны уравнения состояния:

$$p_\lambda = w_\lambda \rho_\lambda \tag{9.146}$$

и скорости звука

$$\delta p_\lambda = u_{s\lambda}^2 \delta p_\lambda \tag{9.147}$$

Вообще говоря, $w_\lambda \neq u_{s\lambda}^2$ так как $w_\lambda \neq \mathrm{const}$!

В остсутствие материи (9.141)–(9.143) не имеют нетривиальных решений ⇒ свободное грав. поле не имеет распространяющихся скалярных (и векторных!) мод. Все распространяющиеся моды – тензорные, спиральность ±2 (или смесь).

Моды за горизонтом и моды под горизонтом

Длина волны возмущения

$$\lambda(\eta) = \frac{2\pi}{q(\eta)} \tag{9.148}$$

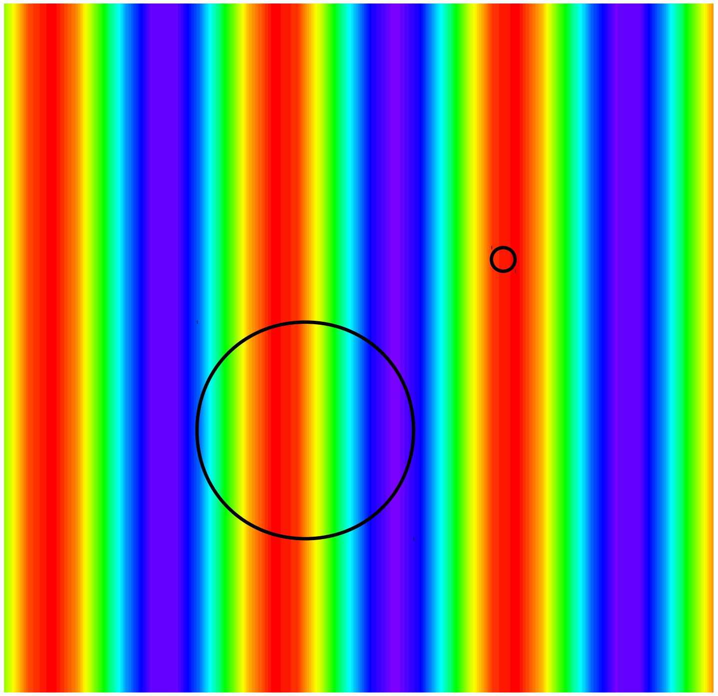
Для РД-стадии $l_H(\eta) = 1/H(\eta)$,
Для ДМ-стадии $l_H(\eta) = 2/H(\eta)$,
Всегда $l_H(\eta) \sim 1/H(\eta)$

Важно различать случаи:
Далеко за горизонтом

$$\lambda(\eta) \gg l_H(\eta) \Rightarrow q(\eta) \ll H(\eta) \tag{9.149}$$

Глубоко под горизонтом

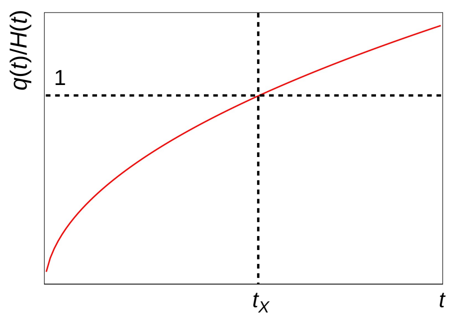
$$\lambda(\eta) \ll l_H(\eta) \Rightarrow q(\eta) \gg H(\eta) \tag{9.150}$$



РД и ДМ-стадии идут с замедлением ускорения $\Rightarrow$

$$\frac{l_H(t)}{\lambda(t)} = \frac{q(t)}{H(t)} = \frac{k/a(t)}{H(t)} \propto \frac{1/t^\alpha}{1/t} = t^{1-\alpha} \tag{9.151}$$

$\alpha < 1 \Rightarrow$ отношение растет,
мода может войти под горизонт



На РД-стадии

$$l_H = \frac{1}{H} = \frac{1}{a'/a^2} = \frac{\text{const}^2\eta^2}{\text{const}} = \text{const}\cdot\eta\cdot\eta = a(\eta)\eta \tag{9.152}$$

На ДМ-стадии

$$l_H = \frac{2}{H} = \frac{2}{a'/a^2} = \frac{2\text{const}^2\eta^4}{2\text{const}\,\eta} = \text{const}\cdot\eta^2\cdot\eta = a(\eta)\eta \tag{9.153}$$

Условие входа под горизонт

$$\lambda(\eta) \sim l_H(\eta) \tag{9.154}$$

$$\lambda(\eta) = \frac{2\pi}{q(\eta)} = \frac{2\pi}{k/a(\eta)} = \frac{2\pi a(\eta)}{k} \sim a(\eta)\eta \tag{9.155}$$

$$\Rightarrow k\eta_\times \sim 2\pi \sim 1 \tag{9.156}$$

$$\frac{1}{k} \gg \eta - \text{за горизонтом} \tag{9.157}$$

$$\frac{1}{k} \ll \eta - \text{под горизонтом} \tag{9.158}$$

Т.к. $a \sim \eta$ или $a \sim \eta^2$, то эквивалентное условие

$$k \ll \frac{a'}{a} - \text{за горизонтом} \tag{9.159}$$

$$k \gg \frac{a'}{a} - \text{под горизонтом} \tag{9.160}$$

Особенно важен момент η_{eq} (РД $\to$ ДМ).
Под горизонт входят волны

$$k_{eq} \sim \frac{1}{\eta_{eq}} \tag{9.161}$$

Их современный импульс (волновое число)

$$q_{eq}^{(0)} = \frac{k_{eq}}{a_0} = \frac{1}{a_0\eta_{eq}} \tag{9.162}$$

$$\lambda_{eq}^{(0)} = \frac{2\pi}{q_{eq}^{(0)}} = 2\pi a_0\eta_{eq} = 2\pi\cdot 1.2\cdot 10^2\ \text{Мпк} = 750\ \text{Мпк} \tag{9.163}$$