Лекция 3

Свойства уравнений Эйнштена: сохранение энергии-импульса, гравитационные волны, антигравитация. Уравнение Фридмана и полная система уравнений космологии. Космологические горизонты, красное смещение.

Уравнение Эйнштейна с Λ-членом:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \tag{3.1}$$

Из уравнения Эйнштейна следует ковариантный закон сохранения импульса:

$$\nabla^\mu \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\nu \tag{3.2}$$

$$\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) = 8\pi G\,\nabla^\mu T_{\mu\nu} \tag{3.3}$$

$$\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) \equiv 0 \;\Rightarrow\; \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{3.4}$$

Доказательство.

Тождество Бьянки:

$$\nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu} = 0 \tag{3.5}$$

Сворачиваем по λ, μ:

$$\nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\lambda\nu} + \nabla_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\lambda} = 0 \tag{3.6}$$

$$\nabla_\rho R_{\sigma\nu} + \nabla_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} - \nabla_\nu R_{\sigma\rho} = 0 \mid g^{\sigma\rho} \tag{3.7}$$

$$\nabla^\rho R_{\rho\nu} + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} - \nabla_\nu R = 0 \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\nabla^\rho R_{\rho\nu} - \nabla^\mu(g_{\mu\nu}R) + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} &= \\ = 2\nabla^\mu R_{\mu\nu} - \nabla^\mu(g_{\mu\nu}R) &= \\ = 2\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) &= 0\end{aligned} \tag{3.9}$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{3.10}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{3.11}$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) \;=\; 0 \;\Rightarrow \tag{3.12}$$

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda}(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) \;=\; 0 \tag{3.13}$$

Всё Γ и всё R – это возмущения над нулевыми значениями за счет возмущения $h_{\mu\nu}$
$\Rightarrow$ можно использовать формулы первого порядка для возмущений:

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\rho\nu} - \partial_\rho\Gamma^\mu_{\lambda\nu} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\rho\nu} &= \partial_\lambda\frac{1}{2}\eta^{\mu\sigma}(\partial_\rho h_{\nu\sigma} + \partial_\nu h_{\sigma\rho} - \partial_\sigma h_{\rho\nu}) = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\lambda\partial_\rho h^\mu_\nu + \partial_\lambda\partial_\nu h^\mu_\rho - \partial_\lambda\partial^\mu h_{\rho\nu})\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^\lambda\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial^\lambda\partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial^\lambda\partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h^\lambda_\lambda)\bigstar \tag{3.16}$$

При малом преобразовании $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ $\bigstar$:

$$h'^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \partial^\mu\xi^\nu + \partial^\nu\xi^\mu \Rightarrow h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu \tag{3.17}$$

$R_{\mu\nu}$ калибровочно инвариантно относительно преобразования:

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu \text{ (проверить } \bigstar) \tag{3.18}$$

Гармоническая калибровка:

$$\partial_\mu h^\mu_\nu - \frac{1}{2}\partial_\nu h^\lambda_\lambda = 0 \tag{3.19}$$

обеспечена, если

$$\partial_\mu \partial^\mu \xi_\nu = -\left(\partial_\mu h^\mu_\nu - \frac{1}{2}h^\lambda_\lambda\right) \tag{3.20}$$

Тогда, из (3.16) ★:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^\lambda\partial_\lambda h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}(\partial_0^2 - \Delta)h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} \Rightarrow \tag{3.21}$$

$$\boxed{\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right)} \tag{3.22}$$

Если $T_{\mu\nu} = 0$, то

$$\Box h_{\mu\nu} = 0 \tag{3.23}$$

– волновое уравнение, грав. волны в вакууме.

Замечание: если $G = 0$, то грав. волны все равно есть.

Макроскопический феноменологический тензор энергии-импульса изотропной «жидкости»

1. Покоящееся вещество («идеальная жидкость») в пространстве Минковского (≈ тензор напряжений):

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \tag{3.25}$$

2. Вещество движется в пространстве Минковского:

$$(p+\rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} - \underline{\text{это тензор}} \tag{3.26}$$

В системе покоя материи:

$$(p+\rho)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - p\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

Следовательно, в произвольной движущейся системе:

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \tag{3.28}$$

3. Вещество в произвольной системе.
В локально-Лоренцевой системе должно быть:

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \tag{3.29}$$

Тогда общековариантный тензор ЭИ:

$$\boxed{T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}} \tag{3.30}$$

Статическое изотропное вещество как источник гравитации (и антигравитации)

$$\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T\right) \tag{3.31}$$

Для компоненты 00: \$T = \rho - 3p$\

$$\partial_0^2 h_{00} - \Delta h_{00} = -8\pi G(\rho + 3p) \ \Rightarrow \tag{3.32}$$

$$\Delta h_{00} = 8\pi G(\rho + 3p) \tag{3.33}$$

В нерелятивистской статике (см. (2.123)):

$$\Delta h_{00} = 2\Delta\varphi \ \Rightarrow \tag{3.34}$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G(\rho + 3p) \tag{3.35}$$

Источником гравитации является не ρ, а $\rho + 3p$.
Если $\rho < 0,\ p = 0 \ \Rightarrow$ антигравитация.
Если $\rho + 3p < 0 \ \Rightarrow$ тоже антигравитация!

Λ-член

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \tag{3.36}$$

$$T^{(\Lambda)}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \Lambda & & & \\ & -\Lambda & & \\ & & -\Lambda & \\ & & & -\Lambda \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

Если $\Lambda > 0$, то $\rho + 3p = -2\Lambda < 0$.
Космологическая константа $\Lambda > 0$ приводит к антигравитации.

Классическая космология: космологический принцип и смысл однородности и изотропии

• Предполагаем, что Вселенная заполнена идеальной (без вязкости, многокомпонентной)
космологической жидкостью
В сопутствующей системе

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} = \sum_i \hat{T}_i \tag{3.38}$$

• *Космологический принцип:* Вселенная изотропна и однородна: космологическая жидкость однородна и геометрия однородна (кривизна одинакова).

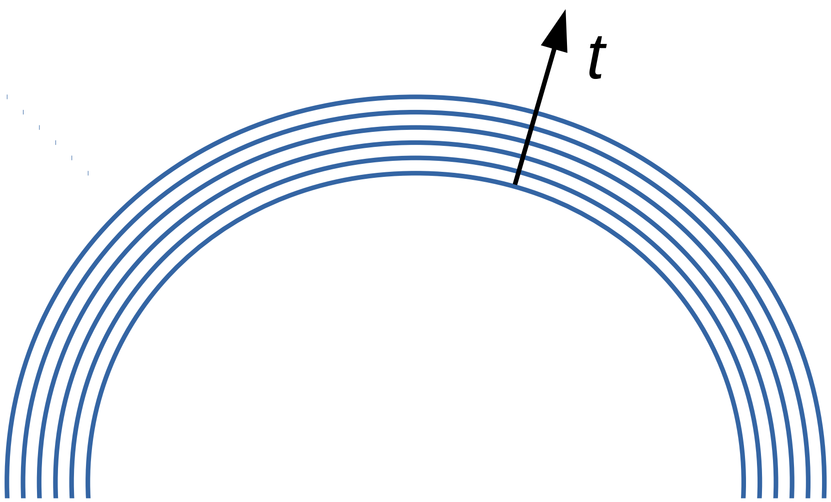
• Смысл однородности.
Multifinger time – многонаправленное время – набор пространственно-подобных поверхностей, перенумерованных параметром t.
Через каждое событие проходит гиперповерхность однородности.

• Через каждое событие проходит гиперповерхность изоторпии.

• Изотропия на пространственной гиперповерхности влечет однородность на той же поверхности.
Доказательство: Если бы не было однородности, на поверхности возникли бы градиенты, нарушающие изотропию.

• На гиперповрхностях однородности космологическая жидкость должна покоиться (иначе – анизотропия). $\Rightarrow$
Если все пространство-время разложено на систему

поверхностей однородности, то имеет естественную сопутствующую космологическую систему отсчета, связанную с покоящейся космологической жидкостью.



Дополнительное чтение: Ч.Мизнер, К.Торн, Дж.Уилер. Гравитация, Т.2., §27.2 – §27.5.

Космологический принцип и наблюдение:

Однородность является обобщением результатов наблюдений, но Вселенная не стационарна, поэтому прямо однордность наблюдать невозможно!

На больших расстояниях наблюдается плотность материи, температура и т.д. отличные от локальных современных.

Однородные и изотропные трехмерные пространства

Однородных и изотропных трехмерных пространства всего три: евклидово пространство, трехмерная сфера, трехмерная псевдосфера.

Евклидово трехмерное пространство пространство (3-плоскость)
Есть такая система координат, что во всем пространстве

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (3.39)$$

3-*сфера*
Фиктивное 4-мерное евклидово пространство:

$$ds^2 = (dy^1)^2 + (dy^2)^2 + (dy^3)^2 + (dy^4)^2 \quad (3.40)$$

Уравнение 3-сферы:

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 + (y^4)^2 = a^2 \quad (3.41)$$

Описывается тремя параметрами:

$$\begin{aligned} y^1 &= a \cos\chi \\ y^2 &= a \sin\chi \cos\theta \\ y^2 &= a \sin\chi \sin\theta \cos\varphi \\ y^4 &= a \sin\chi \sin\theta \sin\varphi \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = a^2 [d\chi^2 + \sin^2\chi (d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] \bigstar \quad (3.43)$$

★ Упражнение: попытайтесь отгадать параметризацию 4-х мерной сферы в 5-мерном пространстве и выражение для элемента длины на 4-х мерной сфере.

В квадратных скобках – метрика единичной 3-сферы, никаких упоминаний фиктивного 4-мерного пространства (y^1, y^2, y^3, y^4) нет.

3-*псевдосфера (гиперболоид)* Фиктивное 4-мерное псевдоевклидово пространство:

$$ds^2 = (dy^1)^2 - (dy^2)^2 - (dy^3)^2 - (dy^4)^2 \tag{3.44}$$

3-псевдосфера – это сфера в 4-пространстве Минковского (псевдосфера):

$$(y^1)^2 - (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 = a^2, \quad y^1 > 0 \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned} y^1 &= a \operatorname{ch}\chi \\ y^2 &= a \operatorname{sh}\chi \cos\theta \\ y^2 &= a \operatorname{sh}\chi \sin\theta \cos\varphi \\ y^4 &= a \operatorname{sh}\chi \sin\theta \sin\varphi \end{aligned} \tag{3.46}$$

$$dl^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j = a^2[d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)] \bigstar \tag{3.47}$$

Как понять, что эти пространства однородны?
Для 3-сферы, 3-плоскости и 3-псевдосферы

$$R_{ijkl} = \frac{\varkappa}{a^2}(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}) \tag{3.48}$$

$$\varkappa = \begin{cases} +1 & - \text{ 3-сфера} \\ 0 & - \text{ 3-плоскость} \\ -1 & - \text{ 3-псевдосфера} \end{cases} \tag{3.49}$$

Проверяется прямым вычислением, или в ковариантном формализме: см. Robert M. Wald, General Relativity Sec. 5.1, p. 91.

$$R_{ij} = 2\frac{\varkappa}{a^2}\gamma_{ij} \bigstar \tag{3.50}$$

$$R = 6\frac{\varkappa}{a^2} \bigstar \tag{3.51}$$

Скаляр кривизны всюду одинаков – пространства постоянной кривизны.

Метрика Фридмана-Робертсона-Уокера (FRW)

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\gamma_{ij} dx^i dx^j \tag{3.52}$$

γ_{ij} – метрика одного из однородных 3-пространств.
Для сферы и псевдосферы можно взять метрику единичных сфер.
Для 3-плоскости физ. смысл имеет только $a(t_1)/a(t_2)$

$$\hat{g} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & a^2(t)\hat{\gamma} \end{array}\right) \tag{3.53}$$

Только в рамках модели FRW космологическое время приобретает смысл!

Координаты FRW – сопутствующая система отсчета неподвижной космологической жидкости

FRW система отсчета связана с свободной неподвижной космологической жидкостью $\Rightarrow$ неподвижные частицы движутся свободно, т.е. по геодезическим.

Что такое неподвижные частицы:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} = 0;\ u^0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{dt}{dt} = 1 \tag{3.54}$$

$$\forall \mu :\ \frac{du^\mu}{ds} = 0 \tag{3.55}$$

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda = 0 \tag{3.56}$$

Подставляем (3.54), (3.55):

$$0 + \Gamma^\mu_{00} u^0 u^0 = \Gamma^\mu_{00} = 0 \tag{3.57}$$

Нужно проверить, что $\Gamma^\mu_{00} = 0$.

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma}(\partial_\nu g_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda g_{\nu\sigma} - \partial_\sigma g_{\nu\lambda}) \tag{3.58}$$

$$\Gamma^0_{00} = 0;\ \Gamma^0_{0i} = 0;\ \Gamma^i_{00} = 0\ \bigstar \tag{3.59}$$

$$\Gamma^i_{0j} = \delta^i_j \frac{\dot a}{a}\ \bigstar \tag{3.60}$$

$$\Gamma^0_{ij} = a\dot a \gamma_{ij}\ \bigstar \tag{3.61}$$

$$\Gamma^i_{jk} = {}^{(3)}\Gamma^i_{jk}\ \bigstar \tag{3.62}$$

Уравнение Фридмана

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \tag{3.63}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\nu\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \tag{3.64}$$

$$R_{00} = -\partial_0 \Gamma^\lambda_{0\lambda} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{0\lambda} = -3\frac{\ddot a}{a}\ \bigstar \tag{3.65}$$

$$\boxed{R_{00} = -3\,\frac{\ddot a}{a}} \tag{3.66}$$

$$R_{0i} = \partial_j \Gamma^j_{0i} - \partial_0 \Gamma^\lambda_{i\lambda} + \Gamma^\lambda_{0i}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{0\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda i} = 0\ \bigstar \tag{3.67}$$

$$\begin{aligned} R_{ij} = \partial_\lambda \Gamma^\lambda_{ij} - \partial_i \Gamma^\lambda_{j\lambda} + \Gamma^\lambda_{ij}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma} - \Gamma^\lambda_{i\sigma}\Gamma^\sigma_{\lambda j} = \\ \partial_0 \Gamma^0_{ij} + \partial_k \Gamma^k_{ij} \\ - \partial_i \Gamma^0_{j0} - \partial_i \Gamma^l_{jl} \\ + (\Gamma^0_{ij}\Gamma^\sigma_{0\sigma} + \Gamma^k_{ij}\Gamma^\sigma_{k\sigma}) \\ - (\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{0j} + \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^k_{il}\Gamma^l_{jk}) = \\ = \partial_0 \Gamma^0_{ij} + \Gamma^0_{ij}\Gamma^\sigma_{0\sigma} - \Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{0j} - \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + {}^{(3)}R_{ij} = \\ = (a\ddot a + 2\dot a^2)\gamma_{ij} + {}^{(3)}R_{ij} = \\ = \Big\backslash\, {}^{(3)}R_{ij} = 2\frac{\varkappa}{r^2}\gamma_{ij};\ r \equiv 1;\ \varkappa = +1, 0, -1 \Big\backslash = \\ = (a\ddot a + 2\dot a^2 + 2\varkappa)\gamma_{ij} \end{aligned} \tag{3.68}$$

$$\boxed{R_{ij} = (a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2\varkappa)\gamma_{ij}} \tag{3.69}$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = g^{00}R_{00} + g^{ij}R_{ij} = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a} + \frac{\varkappa}{a^2}\right) \Rightarrow \tag{3.70}$$

ЛЧ, 00-компонента уравнений Эйнштейна:

$$R_{00} - \frac{1}{2}g_{00}R = 3\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\varkappa}{a^2}\right) \tag{3.71}$$

Покоящаяся материя:

$$T_{00} = \rho; \quad g_{00}\Lambda = \Lambda \;\Rightarrow \tag{3.72}$$

Уравнение Фридмана (с Λ-членом)

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2}} \tag{3.73}$$

Как меняется ρ в зависимости от t и a?

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{3.74}$$

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu 0} &= \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\sigma}T^{\sigma 0} + \Gamma^0_{\mu\sigma}T^{\mu\sigma} = \\ &= \partial_0 T^{00} + \Gamma^i_{i0}T^{00} + \Gamma^0_{ij}T^{ij} = \\ &= \Big\backslash\, T^{ij} = (p+\rho)u^i u^j - pg^{ij} = -pg^{ij} = \frac{1}{a^2}p\gamma^{ij} \,\Big\backslash = \\ &= \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \end{aligned} \tag{3.75}$$

(Λ-член удовлетворяет ковариантное сохранение энергии-имульса тождественно).

Полная система уравнений изотропной космологии:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad \text{(уравнение Фридмана)} \tag{3.76}$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad \text{(ковариантное сохранение)} \tag{3.77}$$

$$p = p(\rho) \quad \text{(уравнение состояния)} \tag{3.78}$$

Решения уравнений изотропной однородной космологии

Решения для $\varkappa = 0$

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G(\rho + \Lambda) \tag{3.79}$$

Нерелятивистская пыль, без Λ-члена
Уравнение состояния:

$$p = 0 \tag{3.80}$$

Из (3.77):

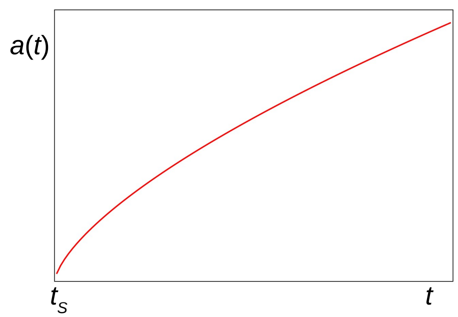
$$\frac{\dot\rho}{\rho} = -3\frac{\dot a}{a} \;\Rightarrow\; d(\ln\rho) = d(\ln a^{-3}) \;\Rightarrow \tag{3.81}$$

$$\rho = \frac{\mathrm{const}}{a^3} \quad \text{(сохранение числа частиц)} \tag{3.82}$$

Из (3.79):

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{\mathrm{const}}{a^3} \;\Rightarrow\; a(t) = \mathrm{const}'(t - t_s)^{2/3} \tag{3.83}$$

При $t = t_s$ $a(t) = 0$ – сингулярность.



Будем полагать $t_s = 0$:

$$a(t) = \mathrm{const}\, t^{2/3} \tag{3.84}$$

$$\rho = \frac{\mathrm{const}}{t^2} \tag{3.85}$$

В момент сингулярности пространство было плоским и *бесконечным*, плотность была бесконечной.
Постоянную в (3.85) можно найти:

$$\frac{\dot a}{a} = \frac{2}{3}\frac{1}{t} \Rightarrow \rho = \frac{3}{8\pi G}\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{1}{6\pi G}\frac{1}{t^2} \tag{3.86}$$

Постоянная Хаббла:

$$H(t) = \frac{\dot a}{a} \tag{3.87}$$

$1/H$ во всех моделях порядка возраста Вселенной (от сингулярности!)
В частности, в модели пыли

$$H(t) = \frac{2}{3}\frac{1}{t}, \quad t = \frac{2}{3}\frac{1}{H(t)} \tag{3.88}$$

Современное (t_0) значение постоянной Хаббла:

$$\boxed{H_0 \equiv H(t_0) = h \times 100\frac{\text{км/с}}{\text{Мпк}}, \quad h = 0.6774 \pm 0.0046} \tag{3.89}$$

$$t_0 \approx 3.0 \cdot 10^{17}\, sec \approx 9.6 \cdot 10^9\, years \bigstar \tag{3.90}$$

Космологический горизонт

Конформное время.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j = a^2(t)(d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j) \qquad (3.91)$$

– конформно-плоская метрика.

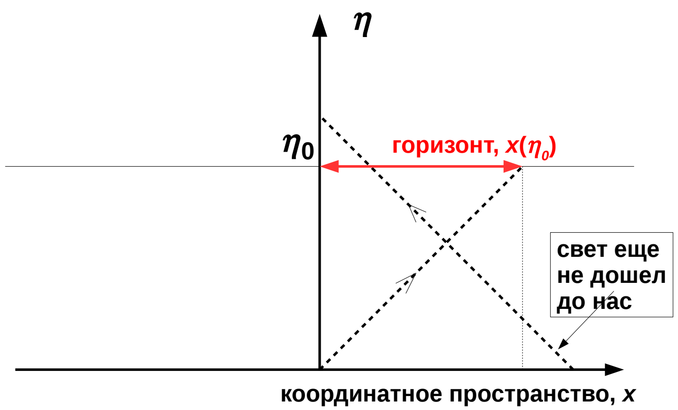
$$d\eta = dt/a(t) \qquad (3.92)$$

Для плоской модели с пылью:

$$\eta(t) = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^t \frac{dt}{\text{const}\cdot t^{2/3}} = \frac{3}{\text{const}}\cdot t^{1/3} \qquad (3.93)$$

Светоподобные геодезические: $ds^2 = 0 \Rightarrow$

$$d\eta^2 = \delta_{ij}dx^i dx^j = dx^2 \;\Rightarrow\; d\eta = |dx| \qquad (3.94)$$



$$x(\eta_0) = \eta_0 = \eta(t_0) \qquad (3.95)$$

$$l_H(t_0) = a(t_0)x(\eta_0) = a(t_0)\eta(t_0) =$$
$$= a(t_0)\int_0^{t_0}\frac{dt}{a(t)} = \text{const}\cdot t_0^{2/3}\int_0^{t_0}\frac{dt}{\text{const}\cdot t^{2/3}} = 3t_0 =$$
$$= 28.8\cdot 10^9\,\text{св. лет} = \frac{2}{H(t_0)} \qquad (3.96)$$

($t_0 \sim 9.6\cdot 10^9$ св. лет – много меньше горизонта!)

★ Пусть мы наблюдаем объект с возрастом Δt. Каково до него расстояние (в модели пыли)? Почему для малых расстояний $L \approx c\Delta t$?

Красное смещение

Эволюция свободного электромагнитного поля

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}F^{\nu\rho}F_{\nu\rho} \tag{3.97}$$

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.98}$$

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}g^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} \tag{3.99}$$

В конформно-плоской метрике

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - \delta_{ij}dx^i dx^j] \tag{3.100}$$

Имеем

$$g_{\mu\nu}(\eta) = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu} \tag{3.101}$$

$$g^{\mu\nu}(\eta) = \frac{1}{a^2(\eta)}\eta^{\mu\nu} \tag{3.102}$$

$$\sqrt{-g} = a^4 \tag{3.103}$$

Из (3.99):

$$S = -\frac{1}{4}\int d^4x\, a^4\frac{1}{a^4}\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} = -\frac{1}{4}\int d^4x\eta^{\mu\nu}\eta^{\lambda\rho}F_{\mu\lambda}F_{\nu\rho} \tag{3.104}$$

– электромагнитное поле конформно-инвариантно.
Плоская волна в (η, x^i)-пространстве распространяется как в пространстве Минковского:

$$A_\mu^{(\alpha)} = e_\mu^{(\alpha)}\exp[i(|k|\eta - \mathbf{kx})] \tag{3.105}$$

$|k|$ – не частота, и $\mathbf{k}$ – не волновой вектор в физическом пространстве!
Но можно перейти к физическим величинам:

$$\Delta\eta = \frac{2\pi}{k} \text{ – конформный период, не зависит от времени} \tag{3.106}$$

$$\Delta T(t) = a(t)\Delta\eta \text{ – физический период, растет пропорционально } a(t) \tag{3.107}$$

$$\omega(t) = \frac{2\pi}{\Delta T(t)} = \frac{2\pi}{a(t)\Delta\eta} = \frac{k}{a(t)} \text{ – физическая частота, падает обратно пропорционально } a(t) \tag{3.108}$$

Уменьшение частоты – красное смещение.

Эволюция скорости свободных частиц

Координатная скорость частицы отлична от нуля:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \neq 0 \tag{3.109}$$

Физическая скорость частицы:

$$dX^i = a(t)dx^i \Rightarrow U^i = \frac{dX^i}{ds} = a(t)u^i \tag{3.110}$$

$$\frac{du^\mu}{ds} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda = 0 \Rightarrow \backslash\Gamma^i_{jk} = 0\backslash \Rightarrow \tag{3.111}$$

$$\frac{du^i}{ds} + 2\Gamma^i_{0j}u^0u^j = 0 \tag{3.112}$$

$$\frac{du^i}{ds} + 2\,\frac{\dot{a}}{a}\,\frac{dt}{ds}\,u^i = 0 \tag{3.113}$$

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{dt}{ds}\frac{du^i}{dt} = \frac{dt}{ds}\frac{d}{dt}\left(\frac{U^i}{a}\right) = \frac{dt}{ds}\left(\frac{dU^i}{dt}\,\frac{1}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2}U^i\right) \tag{3.114}$$

$$\frac{dt}{ds}\left(\frac{dU^i}{dt}\,\frac{1}{a} - \frac{\dot{a}}{a^2}U^i\right) + 2\frac{\dot{a}}{a}\,\frac{dt}{ds}\,\frac{1}{a}U^i = 0 \tag{3.115}$$

$$\frac{dU^i}{dt} = -\frac{\dot{a}}{a}U^i \tag{3.116}$$

$$\frac{dU^i}{U^i} = -\frac{da}{a} \Rightarrow U^i = \frac{\mathrm{const}}{a(t)} = U^i(t_i)\frac{a(t_i)}{a(t)} \tag{3.117}$$

Скорость (и импульс $p_i = mU_i$, но не энергия!) массивных частиц падает как $a(t)$.

Красное смещение z определяется через изменение частоты света:

$$\frac{\omega_i}{\omega_0} = 1 + z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} \Rightarrow \tag{3.118}$$

$$\boxed{z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_i)} - 1} \tag{3.119}$$

Закон Хаббла

t_i близко в прошлом к t_0

$$\begin{aligned} a(t_i) &= a(t_0) + (t_i - t_0)\dot{a}(t_0) = \\ &= a(t_0)\left[1 - (t_0 - t_i)\frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}\right] = \\ &= a(t_0)[1 - (t_0 - t_i)H_0] \end{aligned} \tag{3.120}$$

$$z(t_i) = \frac{a(t_0)}{a(t_0)[1 - (t_0 - t_i)H_0]} - 1 \cong (t_0 - t_i)H_0 \tag{3.121}$$

Но $t_0 - t_i = r \Rightarrow$

$$z(t_i) = rH_0 \tag{3.122}$$

Космологическое красное смещение – не Допплеровское!

Во-первых, это следует из замедления собственной скорости относительно неподвижного реликтового излучения.

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dl^2 \tag{3.123}$$

Поместим себя в $l = 0$, момент времени t_0.
Физическое расстояние до точки на координатном расстоянии l

$$r(t_0) = a(t_0)l \quad \text{(это точное равенство)} \tag{3.124}$$

$$\dot{r}(t_0) = v(t_0) = \dot{a}l \tag{3.125}$$

– скорость может быть сколь угодно велика при достаточно большом l!
Эффект Допплера не описывает такую ситуацию.

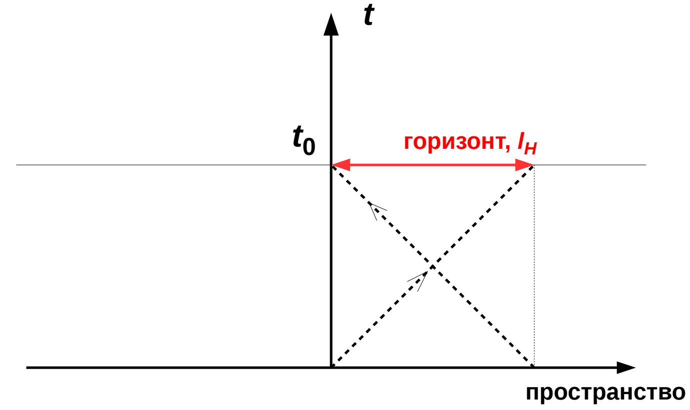
Откуда берется иллюзия эффекта Допплера?

Эффект Допплера для малых v есть:

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{v}{c} \equiv v = \dot{a}l = \frac{\dot{a}}{a}al = Hr \tag{3.126}$$

Для малых расстояний космологическое красное смещение *выглядят* как эффект Допплера (и ошибочно трактуется как эффект Допплера).

Как мы видим горизонт?



Для горизонта $t_i = 0 \Rightarrow$

$$z(0) = \frac{a(t_0)}{a(0)} - 1 = \frac{a(t_0)}{0} - 1 = \infty \tag{3.127}$$

Горизонт виден при бесконечном красном смещении – *как бы* удаляющийся со скоростью света