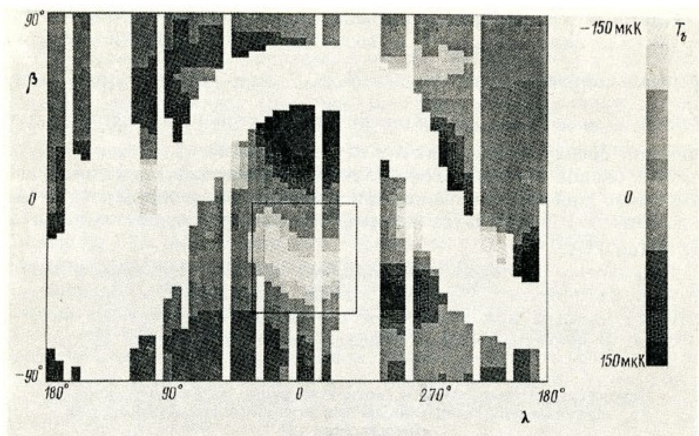
Введение

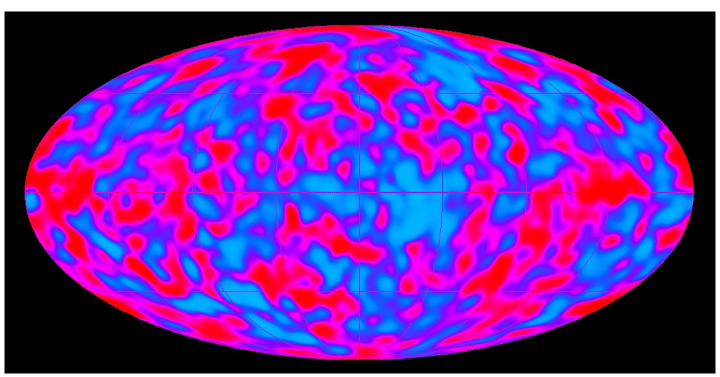
Современная космология

- Классическая космология (А.А. Фридман, В. Де Ситтер, Э. Хаббл, 1920-е)
- Теория космологических возмущений (Е.М. Лифшиц, 1940-е)
- Инфляционная космология (А.А. Старобинский, А. Гус (Guth), А.Д. Линде, конец 1970-х - начало 1980-х)

РЕЛИКТ - январь 1992



COBE - апрель 1992

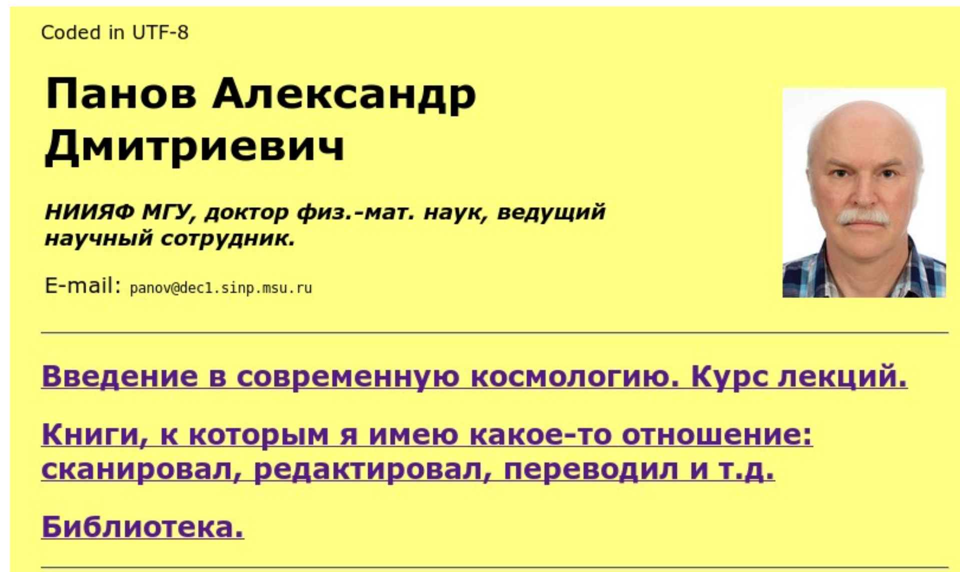


Литература

- Д.С. Горбунов, В.А. Рубаков. Введение в теорию ранней вселенной (два тома).
- А. Лайтман, В. Пресс, Р. Прайс, С. Тюкольски. Сборник задач по теории относительности и гравитации.

Как устроен курс

Презентации в сети: `dec1.sinp.msu.ru/~panov`



Все формулы пронумерованы!

Проверить вычисления: ★

Наука космология – не вполне обычна

- Научный метод: наблюдаемость и воспроизводимость
- Аппарат космологии описывает «ансамбль одинаковых вселенных», не единичную Вселенную
- Вселенная – уникальный объект
- Операционально неопределимое понятие вероятности – байесовская вероятность:
  Вероятность определяется как степень уверенности в истинности суждения (Википедия).
- Cosmic variance – космическая неопределенность $\Rightarrow$ некоторые предсказания в принципе не могут быть проверены с любой наперед заданной точностью.
- Мультиверс (4 уровня: Макс Тегмарк):
  - причинных областей (1-й уровень)
  - хаотической инфляции (2-й уровень)
  - квантовый (3-й уровень)
  - математический (4-й уровень)

Лекция 1

Основы ОТО. I.
Дифференциальная геометрия: метрический тензор, афинная связность, ковариантная производная

- Движение тел в гравитационном поле не зависит от природы тел $\Rightarrow$
- Принцип эквивалентности $\Rightarrow$
- Гравитация есть явление геометрическое

Постулат: Движение в гравитационном поле есть свободное движение по геодезической линии искривленного пространства-времени

- ОТО – теория гравитации скалярной материи. (по-видимому (?), частицы с ненулевым спином должны нарушать принцип эквивалентности arXiv:1608.06572)

Два метода дифференциальной геометрии:
1. *Координатный*
2. Ковариантно-геометрический (Э. Картан, дифференциальные формы, внешнее дифференцирование)

Координаты x^μ, $\mu = 0, 1, 2, 3$ произвольным образом *локально* помечают точки (события) пространства-времени.

Квадрат интервала (суммирование по одинаковым верхним и нижним индексам, соглашение Эйнштейна):

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.1}$$

$g_{\mu\nu}$ – **метрический тензор** (сигнатура $+1, -1, -1, -1$).

Квадрат интервала есть фундаментальный инвариант – не зависит от того, в каких координатах мы работаем.

Интервал измеряется в единицах длины, но метрический тензор и координаты не имеют определенной размерности!

Размерности вообще и размерности s, $g_{\mu\nu}$ и x^μ в частности

$$\hbar = c = k_B = 1 \tag{1.2}$$

$$E = mc^2;\ E = k_B T;\ \omega = E/\hbar;\ p = cE;\ p = \hbar k\ \Rightarrow$$
$$[m] = [T] = [\omega] = [p] = [k] = [E] \tag{1.3}$$

Единица измерения энергии – ГэВ.

Переводные коэффициенты вычисляются подбором степеней $c, \hbar, k_B$.
Примеры:

$$[E] = [\hbar\omega] = \left[\frac{\hbar}{t}\right] \Rightarrow [t] = \frac{[\hbar]}{E} \Rightarrow \tag{1.4}$$

$$t(\mathrm{GeV}^{-1}) = \frac{1.05 \cdot 10^{-27}\,\text{эрг} \cdot \text{с}}{10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}\,\text{эрг}} \approx 6.6 \cdot 10^{-25}\,\text{с} \tag{1.5}$$

$$l(\mathrm{GeV}^{-1}) = \frac{1.05 \cdot 10^{-27}\,\text{эрг} \cdot \text{с} \times 3 \cdot 10^{10}\text{см}\,\text{с}^{-1}}{10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-12}\,\text{эрг}} \approx$$
$$\approx 2.0 \cdot 10^{-14}\,\text{см} \tag{1.6}$$

Таблица преобразования размерностей

Энергия	1 ГэВ = 1.602e-03 эрг
Масса	1 ГэВ = 1.783e-24 г
Температура	1 ГэВ = 1.161e+13 К
Длина	1 ГэВ$^{-1}$ = 1.973e-14 см
Время	1 ГэВ$^{-1}$ = 6.582e-25 с
Плотность числа частиц	1 ГэВ^{3} = 1.301e+41 см$^{-3}$
Плотность энергии	1 ГэВ^{4} = 2.085e+38 эрг·см$^{-3}$
Плотность массы	1 ГэВ^{4} = 2.320e+17 г·см$^{-3}$

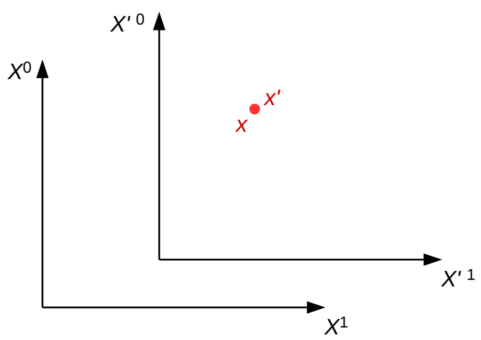
Энергия	1 эрг = 6.241e+02 ГэВ
Масса	1 г = 5.609e+23 ГэВ
Температура	1 К = 8.617e-14 ГэВ
Длина	1 см = 5.068e+13 ГэВ$^{-1}$
Время	1 с = 1.519e+24 ГэВ$^{-1}$
Плотность числа частиц	1 см$^{-3}$ = 7.684e-42 ГэВ^{3}
Плотность энергии	1 эрг·см$^{-3}$ = 4.796e-39 ГэВ^{4}
Плотность массы	1 г·см$^{-3}$ = 4.310e-18 ГэВ^{4}

Формализм ковариантен относительно произвольной (гладкой) замены координат (диффеоморфизм):

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv x'^{\mu}(x) \tag{1.7}$$

Ковариантность достигается за счет использования объектов, преобразующихся специальным образом.

Скаляры – не преобразуются:



$$\varphi'(x') = \varphi(x) \tag{1.8}$$

Контравариантные векторы (верхние индексы) преобразуются как дифференциалы координат

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu}) \tag{1.9}$$

$$dx'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \tag{1.10}$$

$$A'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} A^{\nu} \tag{1.11}$$

Ковариантные векторы (нижние индексы) преобразуются как производные скаляра

$$B_{\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} \;\Rightarrow B'_{\mu} = \frac{\partial \varphi}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} B_{\nu} \tag{1.12}$$

Построение скаляров из векторов:

$$A'^{\mu} B'_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\sigma}} A^{\sigma} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'_{\mu}} B_{\rho} = \delta^{\rho}_{\sigma} A^{\sigma} B_{\rho} = A^{\rho} B_{\rho} \tag{1.13}$$

$\Rightarrow A^{\mu} B_{\mu}$ – инвариант.

В частности, производная по «направлению» скалярной функции – инвариант:

$$\partial_A \varphi = \left(A^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \right) \varphi = A^{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu}} \equiv A^{\mu} \partial_{\mu} \varphi \tag{1.14}$$

Многомерные тензоры (по определению) преобразуются как произведения координат векторов:

$$B'^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\lambda}} B^{\rho}_{\sigma\tau} \tag{1.15}$$

Для символа Кронекера: $\delta'^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ ★.

Свертка по верхнему и нижнему индексу уменьшает размерность тензора на 2:

$$A'^{\mu}_{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\mu}} A^{\rho}_{\sigma} = \delta^{\sigma}_{\rho} A^{\rho}_{\sigma} = A^{\sigma}_{\sigma} \tag{1.16}$$

(вообще не осталось индексов, скаляр)

Почему метрический тензор - тензор?

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma}dx'^\sigma\frac{\partial x^\nu}{\partial x'\rho}dx'^\rho = \\ = ds'^2 = g'_{\sigma\rho}dx'^\sigma dx'^\rho \quad (1.17)$$

$$\Rightarrow g'_{\sigma\rho} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho}g_{\mu\nu} \quad (1.18)$$

Обобщение: Если $\forall$ тензора A^μ_ν

$$C^\mu_\lambda = A^\mu_\nu B^\nu_\lambda - \quad (1.19)$$

тензор, то и B^ν_λ - тензор (и т.д.)

Доказательство

$$C'^\mu_\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}C^\rho_\sigma = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}A^\rho_\nu B^\nu_\sigma \quad (1.20)$$

$$C'^\mu_\lambda = A'^\mu_\nu B'^\nu_\lambda = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}A^\rho_\sigma B'^\nu_\lambda = \\ = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}A^\rho_\nu B'^\sigma_\lambda \Rightarrow \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}B^\nu_\sigma = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}B'^\sigma_\lambda \Rightarrow \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}B^\nu_\sigma = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}B'^\sigma_\lambda \;\Bigg|\; \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu} \Rightarrow \quad (1.23)$$

$$B'^\alpha_\lambda = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\lambda}B^\nu_\sigma \quad (1.24)$$

Следствие: Величина, задаваемая обратной матрицей к метрическому тензору, сама тензор:

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\lambda \Rightarrow g^{\mu\nu} - \text{тензор} \quad (1.25)$$

Поднятие и опускание индексов

Если A^μ – контравариантный вектор, то

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \quad (1.26)$$

– ковариантный вектор.

И наоборот:

$$A^\mu = g^{\mu\nu}A_\nu \quad (1.27)$$

Считают, что A^μ и A_μ – одна и та же величина, записанная по-разному (строго говоря, это неверно).

$T^\mu{}_\nu$ и $T_\nu{}^\mu$ – не одно и то же!

$$g^{\mu\nu}T^\mu{}_\nu = T^{\mu\nu} \quad (1.28)$$
$$g^{\mu\nu}T_\nu{}^\mu = T^{\nu\mu} \quad (1.29)$$

Инвариантный объем

$$g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \tag{1.30}$$

$$\hat{J} = \left(J^\rho_\mu\right) = \left(\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\right)^{\leftarrow\text{столбец}}_{\leftarrow\text{строка}} \equiv \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) \tag{1.31}$$

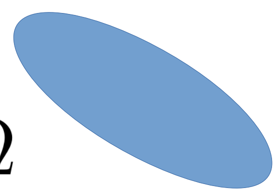
$$\hat{g}' = \hat{J}\hat{g}\hat{J}^T \tag{1.32}$$

$$g \equiv \det \hat{g}; \quad J \equiv \det \hat{J} \tag{1.33}$$

$$g' = J^2 g \Rightarrow J = \sqrt{\frac{g'}{g}} \tag{1.34}$$

маленький
4-объем,
почти
плоский

Ω



Элемент объема - это геометрическое понятие, инвариант!

$$V = \int\limits_\Omega d^4x; \quad V' = \int\limits_\Omega d^4x' \tag{1.35}$$

$$V \neq V' \tag{1.36}$$

$$V = \int\limits_\Omega d^4x = \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right) d^4x' = \int\limits_\Omega \sqrt{\frac{g'}{g}} d^4x' = $$
$$= \sqrt{\frac{g'}{g}} \int\limits_\Omega d^4x' = \sqrt{\frac{g'}{g}} V' \Rightarrow \tag{1.37}$$

$$V = \sqrt{\frac{g'}{g}} V' \Rightarrow V\sqrt{-g} = V'\sqrt{-g'} \tag{1.38}$$

$$\sqrt{-g} \int\limits_\Omega d^4x = \sqrt{-g'} \int\limits_\Omega d^4x' \tag{1.39}$$

$$\int\limits_\Omega \sqrt{-g} d^4x = \int\limits_\Omega \sqrt{-g'} d^4x' \tag{1.40}$$

$\sqrt{-g}d^4x$ – инвариантный элемент объема

Инвариантый элемент объема – инвариантная мера интегрирования, но не объем в физическом смысле!

$$[g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu] = [L^2]$$
$$[\sqrt{-g} dx] = [L]$$
$$[d^3x] = [\text{любая размерность}] \Rightarrow$$
$$[\sqrt{-g} d^4x] = [\text{любая размерность}]$$

Ковариантные производные

$$(\partial_\mu\varphi)' = \frac{\partial\varphi'}{\partial x'_\mu} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\partial_\nu\varphi \tag{1.41}$$

– производная скаляра преобразуется как вектор.

$$\begin{aligned}(\partial_\mu A^\nu)' &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu}A'^\nu = \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}A^\alpha\right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x'^\mu}\left(\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}\right)A^\alpha + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} = \\ &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\cdot\frac{\partial^2 x'^\nu}{\partial x^\beta\partial x^\alpha}A^\alpha + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}\partial_\beta A^\alpha\end{aligned} \tag{1.42}$$

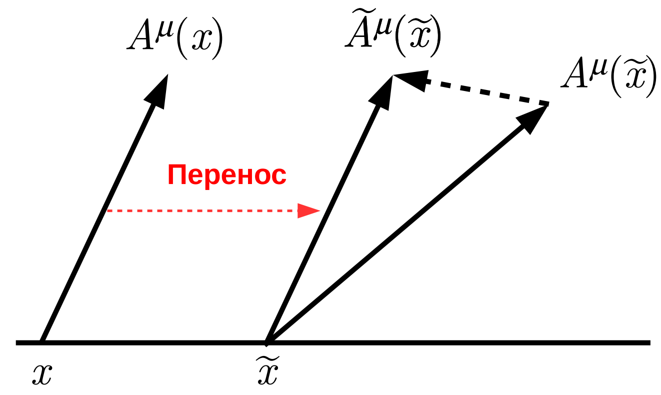
Производная вектора преобразуется как тензор плюс еще какая-то добавка.

Параллельный перенос

Хотим *ковариантную производную*:

$$\begin{cases}(\nabla_\mu A^\nu)' = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\dfrac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\nabla_\alpha A^\beta \\ \nabla_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi\end{cases} \tag{1.43}$$

Проблема: Помимо изменения поля «самого по себе» есть еще добавка, связанная с изменением компонент поля из-за криволинейности системы координат.



Сначала параллельно перенести $A^\mu(x)$ в точку $\tilde{x}$, а потом сравнить с $A^\mu(\tilde{x})$! Перенос:

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda \tag{1.44}$$

$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ – *коэффициенты аффинной связности*

• Вообще говоря, определены совершенно независимо от $g_{\mu\nu}$!

$$\begin{aligned}A^\mu(\tilde{x}) - \tilde{A}^\mu(\tilde{x}) &= A^\mu(\tilde{x}) - [A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda] = \\ &= \partial_\lambda A^\mu dx^\lambda + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda = \\ &= (\partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu)dx^\lambda \equiv \nabla_\lambda A^\mu dx^\lambda\end{aligned} \tag{1.45}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda A^\mu = \partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu} \tag{1.46}$$

Требуем, чтобы $\nabla_\lambda A^\mu$ был тензором!
Это будет определять закон преобразования $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$.

$\nabla_\lambda B_\mu = ?$
Скаляр *не должен меняться* при параллельном переносе:

$$\tilde{A}^\mu(\tilde{x})\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x)B_\mu(x) \tag{1.47}$$

$$[A^\mu(x) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda]\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = A^\mu(x)B_\mu(x) \Rightarrow \tag{1.48}$$

$$A^\mu(x)[\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) - B_\mu(x)] = \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda \tilde{B}_\mu(\tilde{x}) \cong$$
$$\cong \Gamma^\mu_{\nu\lambda}A^\nu dx^\lambda B_\mu(x) = \Gamma^\nu_{\mu\lambda}A^\mu dx^\lambda B_\nu \Rightarrow \tag{1.49}$$

$$\tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = B_\mu(x) + \Gamma^\nu_{\mu\lambda}dx^\lambda B_\nu \tag{1.50}$$

$$B_\mu(\tilde{x}) - \tilde{B}_\mu(\tilde{x}) = (\partial_\lambda B_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}B_\nu)dx^\lambda \Rightarrow \tag{1.51}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda B_\mu = \partial_\lambda B_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda}B_\nu} \tag{1.52}$$

Правило Лейбница (легко проверяется ★):

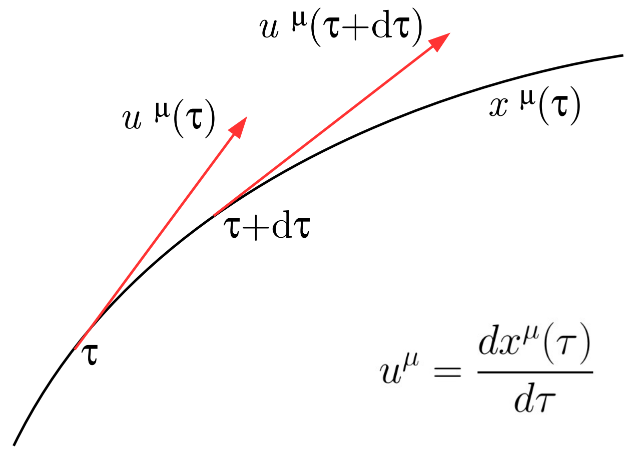
$$\nabla_\lambda(A^\mu B_\nu) = (\nabla_\lambda A^\mu)B_\nu + A^\mu(\nabla_\lambda B_\nu) \tag{1.53}$$

Правило дифференцирования тензоров высшего ранга следует из правила Лейбница:

$$\nabla_\lambda(A^\mu B_\nu) = (\partial_\lambda A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}A^\sigma)B_\nu + A^\mu(\partial_\lambda B_\nu - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}B_\sigma) =$$
$$\partial_\lambda(A^\mu B_\nu) + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}(A^\sigma B_\nu) - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}(A^\mu B_\sigma) \Rightarrow \tag{1.54}$$

$$\boxed{\nabla_\lambda C^\mu_\nu = \partial_\lambda C^\mu_\nu + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}C^\sigma_\nu - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}C^\mu_\sigma} \tag{1.55}$$

Геодезические



$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$$

Геодезическая линия – такая кривая, вдоль которой касательный вектор к ней переносится параллельно самому себе.

$$u^\mu(\tau + d\tau) = u^\mu + \frac{du^\mu(\tau)}{d\tau}d\tau \tag{1.56}$$

$$u^\mu(\tau + d\tau) = \tilde{u}^\mu(\tau + d\tau) = u^\mu(\tau) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu(\tau)dx^\lambda =$$
$$= u^\mu(\tau) - \Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu(\tau)u^\lambda(\tau)d\tau \Rightarrow \tag{1.57}$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau}d\tau = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu(\tau)u^\lambda(\tau)d\tau \Rightarrow \tag{1.58}$$

$$\boxed{\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda = 0} \tag{1.59}$$

Меняем местами ν и λ и складываем:

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2}\left(\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\right)u^\nu u^\lambda = 0 \tag{1.60}$$

$$\frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma^\mu_{\{\nu\lambda\}} u^\nu u^\lambda = 0 \tag{1.61}$$

$$\Gamma^\mu_{\{\nu\lambda\}} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\lambda\nu}\right) \tag{1.62}$$

Геодезические определяются симметризованными коэффициентами связности.
Являются ли коэффициенты связности на самом деле симметричными?