Лекция 8

Последнее рассеяние фотонов. Эпоха реоинизации. Краткая история Вселенной - резюме. Фоновая метрика в конформном времени. Джинсовская неустойчивость. Возмущения метрики и фиксация калибровки $h_{0i} = 0$. Возмущения тензора ЭИ.

Последнее рассеяние фотонов

Не то же самое, что рекомбинация – позже!

Томсоновское сечение рассеяния фотонов:

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3}\frac{\alpha^2}{m_e^2} \approx 0.67 \cdot 10^{-24}\,\text{см}^2 \tag{8.1}$$

Время свободного пробега фотона по отношению к томсоновскому рассеянию:

$$\tau_\gamma = \frac{1}{\sigma_T n_e(T)} \tag{8.2}$$

Из (7.63):

$$\begin{aligned} n_e^2(T) = n_p^2(T) = \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} n_H e^{-\Delta_H/T} = \\ = \backslash n_H \cong \eta_B \cdot n_\gamma \text{ т.к. рекомбинация} \\ \text{практически завершена}\backslash = \\ = \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T^3 e^{-\Delta_H/T} \end{aligned} \tag{8.3}$$

Время последнего рассеяния определяется

$$\tau_\gamma(T_f) \simeq H^{-1}(T_f) \simeq t_f \tag{8.4}$$

t_f мало отличается от $t_{rec} = 350$ тыс.лет, поэтому для оценки T_f можно в правой части уравнения (8.4) использовать t_{rec} вместо t_f:

$$\frac{1}{\sigma_T}\frac{1}{\left[\left(\frac{m_e T_f}{2\pi}\right)^{3/2}\eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 e^{-\Delta_H/T_f}\right]^{1/2}} = t_{rec} \tag{8.5}$$

$$e^{\Delta_H/T_f} = \sigma_T^2 t_{rec}^2 \left(\frac{m_e T_f}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3 \tag{8.6}$$

$$\frac{\Delta_H}{T_f} = \ln\left[\sigma_T^2 t_{rec}^2 \left(\frac{m_e T_f}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_f^3\right] \tag{8.7}$$

В п.ч. $T_f \to T_{rec} \Rightarrow$

$$\frac{\Delta_H}{T_f} \cong \ln\left[\sigma_T^2 t_{rec}^2 \left(\frac{m_e T_{rec}}{2\pi}\right)^{3/2} \eta_B \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_{rec}^3\right] \tag{8.8}$$

$$T_{rec} = 0.32\,\text{эВ} \tag{8.9}$$

$$\eta_B = 0.75 \cdot 6.1 \cdot 10^{-10} \tag{8.10}$$

$$t_{rec} = 3.5 \cdot 10^5\,\text{лет} \Rightarrow \tag{8.11}$$

$$\boxed{T_f = 0.27\,\text{эВ}} \tag{8.12}$$

Аналогично (7.82)

$$t_f = \sqrt{\frac{\pi}{12\zeta(3)}\frac{\Omega_B}{\Omega_M}\frac{M_{Pl}^2}{\eta_B m_p T_f^3}} \approx 460\,\text{тыс. лет} \tag{8.13}$$

$$z_f = \frac{0.27\,\text{эВ}}{2.73 \times 8.6 \cdot 10^{-5}\,\text{эВ}} = 1140 \approx 1100 \tag{8.14}$$

Горизонт на момент последнего рассеяния ($z \approx 1100$)

Момент последнего рассеяния обычно отождествляют с рекомбинацией: $f \to r$

Можно (довольно грубо) найти, считая, что Вселенная всегда была пылевидной:

$$l_{H,r} = \frac{2}{H_r(t_r)} \tag{8.15}$$

Из уравнения Фридмана:

$$H_r^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho_M(t_r) \tag{8.16}$$

$$\rho_M(t_r) = \rho_{M,0} \left(\frac{a_0}{a_r}\right)^3 = \rho_{M,0}(1+z_r)^3 \tag{8.17}$$

$$\rho_{M,0} = \rho_c \Omega_M \tag{8.18}$$

$$l_{H,r} = \frac{2}{\sqrt{\frac{8\pi}{3} G \rho_c \Omega_M (1+z_r)^3}} = \left\backslash \rho_c = \frac{H_0^2}{\frac{8\pi}{3} G} \right\backslash = \\ = \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{(1+z_r)^{3/2}} \tag{8.19}$$

$$\boxed{l_{H,r} = \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{(1+z_r)^{3/2}}} \tag{8.20}$$

Сейчас этот размер растянут в $a_0/a_r = 1 + z_r$ раз:

$$l_{H,r}(t_0) = \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_M}} \frac{1}{\sqrt{1+z_r}} \tag{8.21}$$

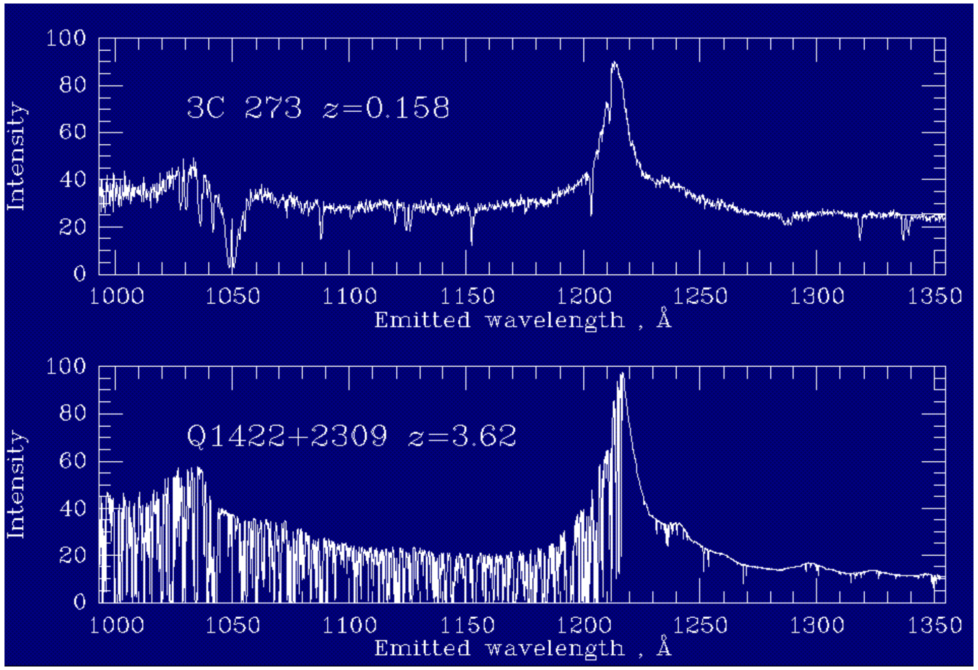
Современный горизонт (см. (4.108)):

$$l_{H,0} = a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \\ = a_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a_0 \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda}\right)^{1/3} \left[\mathrm{sh}\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t\right)\right]^{2/3}} = \frac{2}{H_0} \times 1.8 \tag{8.22}$$

Это в ~ 30 раз больше, чем $l_{H,r}(t_0)$ – видимая часть Вселенной содержит $30^3 \sim 3 \cdot 10^4$ причинно не связанных областей на момент рекомбинации.
Отчего же микроволновой фон однороден с точностью $\sim 10^{-4}$? – **«проблема горизонта»**.

Эпоха реоинизации

Лайман-альфа-лес (Lyman-alpha forest) в спектрах квазаров



Основной пик – Ly$_\alpha$
Линии поглащения - тоже Ly$_\alpha$

- Ly$_\alpha$-линия поглощения сдвинутая разным красным смещением облаков водорода.
- Чем дальше квазар, тем гуще лес.
- При $z > 6$ густота леса перестает расти. Почему?

Реонизация водорода (но не гелия),
$6 < z < 20$, $150 \cdot 10^6 - 1000 \cdot 10^6$ лет.

Остаточная оптическая толщина $\tau \simeq 0.09 \pm 0.03$

Краткая история Вселенной (13.8 млдр. лет)

Событие	T	z	t
Горячий Большой взрыв	–	–	0
GUT-переход (?)	$\sim 10^{16}$ ГэВ	$\sim 10^{30}$	$\sim 10^{-39}$ сек
Бариогенезис (?)	$\sim 10^{16}$ ГэВ	$\sim 10^{30}$	$\sim 10^{-39}$ сек
Электрослабый переход	100 ГэВ	10^{15}	10^{-11} сек
Закалака темной материи(?)	$0.05 \div 300$ ГэВ	$10^{11} \div 10^{15}$	$2 \cdot 10^{-12} \div 10^{-4}$ сек
Адронизация: конфайнмент кварков	170 МэВ	$7 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{-12} \div 10^{-5}$ сек
Закалака нейтрино	1.2 МэВ	$5 \cdot 10^{9}$	0.85 сек
Закалака нейтронов	0.8 МэВ	$3 \cdot 10^{9}$	2.5 сек
Нуклеосинтез	65 кэВ	$3 \cdot 10^{9}$	4.5 мин

Событие	T	z	t
РД $\rightarrow$ МД переход	1 эВ	3000	85 тыс. лет
Рекомбинация электронов	0.32 эВ	1370	350 тыс. лет
Последнее рассеяние фотонов	0.27 эВ	1140	460 тыс. лет
Реоинизация	$50 \div 15$ K^o	$20 \div 6$	$150 \div 1000$ млн.лет
Начало эры ДеСиттера	4.5 K^o	0.65	7.6 млрд.лет
Сейчас	2.73 K^o	0.0	13.8 млрд.лет

Фоновая метрика, конформное время.

$$d\eta = dt/a; \quad dt = ad\eta; \quad dt/d\eta = a \tag{8.23}$$

$$ds^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - dx^i dx^i] = a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{8.24}$$

Перепишем уравнения в производных по конформному времени:

$$\frac{d}{d\eta} = \frac{dt}{d\eta}\frac{d}{dt} = a\frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt} = \frac{1}{a}\frac{d}{d\eta} \tag{8.25}$$

$$H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{a'}{a^2} \tag{8.26}$$

Уравнение Фридмана

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \Rightarrow \left(\frac{a'}{a^2}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho \tag{8.27}$$

(i,j)-компонента уравнений Эйнштейна ★

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} = -8\pi Gp \Rightarrow 2\frac{a''}{a^3} - \frac{a'^2}{a^4} = -8\pi Gp \tag{8.28}$$

Ковариантный закон сохранения энергии

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \Rightarrow \rho' + 3\frac{a'}{a}(\rho+p) = 0 \tag{8.29}$$

Космологические решения $a(\eta)$ ★:

$$\text{РД-стадия: } a(\eta) = \mathrm{const}\cdot\eta;\ \eta = \mathrm{const}\cdot t^{1/2} \tag{8.30}$$

$$\text{ДМ-стадия: } a(\eta) = \mathrm{const}\cdot\eta^2;\ \eta = \mathrm{const}\cdot t^{1/3} \tag{8.31}$$

$$\Lambda-\text{стадия: } a(\eta) = -\frac{1}{H_{dS}\eta};\ \eta = -\mathrm{const}\cdot e^{-H_{dS}t},\ \eta < 0 \tag{8.32}$$

$$H_{dS}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_\Lambda \tag{8.33}$$

Коэффициенты в (8.30) и (8.31)

РД-стадия ($T \lesssim 100$ ГэВ)

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{8\pi}{3}G\frac{\pi^2}{30}g_*T^4 \tag{8.34}$$

Сохранение энтропии:

$$g_*a^3T^3 = g_*^0a_0^3T_0^3 \tag{8.35}$$

$$T^3 = \frac{g_*^0}{g_*}\frac{a_0^3}{a^3}T_0^3 \Rightarrow T = \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3}\frac{a_0}{a}T_0 \tag{8.36}$$

$$\rho_c\Omega_{rad} = \frac{\pi^2}{30}g_*^0T_0^4 \Rightarrow T_0^4 = \frac{\Omega_{rad}\rho_c}{\frac{\pi^2}{30}g_*^0} \tag{8.37}$$

Подставляем (8.37) в (8.36), (8.36) в (8.34):

$$H^2 = \left(\frac{8\pi}{3}G\rho_c\right)\left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3}\left(\frac{a_0}{a}\right)\Omega_{rad} = \\ = H_0^2\left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/3}\left(\frac{a_0}{a}\right)\Omega_{rad} \tag{8.38}$$

$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \backslash t \to a(t):\ da = \dot{a}dt,\ dt = da/\dot{a}\backslash =$$

$$= \int_0^a \frac{1}{a}\frac{da}{\dot{a}} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} = \backslash(8.38)\backslash =$$

$$= \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \left(\frac{g_*^0}{g_*}\right)^{1/6} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \sqrt{\Omega_{rad}}} = \frac{1}{H_0}\left(\frac{g_*}{g_*^0}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0^2}\frac{a}{\sqrt{\Omega_{rad}}} \tag{8.39}$$

$$\boxed{\eta = \frac{1}{H_0}\left(\frac{g_*}{g_*^0}\right)^{1/6} \frac{1}{a_0}\frac{1}{\sqrt{\Omega_{rad}}}\frac{a}{a_0}} \tag{8.40}$$

ДМ-стадия (но не Λ)

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho_c \tag{8.41}$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G\rho_M = \frac{8\pi}{3} G\rho_M^0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow \tag{8.42}$$

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{\rho_M^0}{\rho_c}\left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \Rightarrow H^2 = H_0^2 \Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \tag{8.43}$$

$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} =$$

$$= \int_0^a \frac{da}{a^2 H_0 \sqrt{\Omega_M} (a_0/a)^{3/2}} = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \sqrt{\frac{a}{a_0}} \tag{8.44}$$

$$\boxed{\eta^2 = \frac{a}{a_0}\frac{4}{a_0^2 H_0^2 \Omega_M}} \tag{8.45}$$

Конформные времена $\eta_0, \eta_r, \eta_{eq}$

Уравнение Фридмана:

$$H = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad}(1+z)^4} \tag{8.46}$$

$$\eta = \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = \int_0^a \frac{da}{a^2 H(a)} =$$

$$= \Bigg\backslash z+1 = \frac{a_0}{a};\ da = -\frac{a_0}{(z+1)^2} dz \Bigg\backslash =$$

$$= \int_\infty^z -\frac{dz}{a_0 H(z)} =$$

$$= \frac{1}{a_0 H_0} \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_{rad}(1+z)^4}} \tag{8.47}$$

Конформное время современной эпохи:

$$\eta_0 = \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times$$

$$\times \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M} + (1+z)^3 + \frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}(1+z)^4}} =$$

$$= \frac{2}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M}} \times I(\Omega_M) \tag{8.48}$$

$$\Omega_M = 0.31,\ \Omega_\Lambda = 0.69, \Omega_{rad} = 2\cdot 10^{-4} \Rightarrow$$
$$I(\Omega_M) \approx 0.89 \quad (8.49)$$

Конформное время последнего рассеяния (рекомбинации):

$$\eta_r = \frac{2}{a_0 H_0\sqrt{\Omega_M}}\frac{1}{2}\int_{z_r}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{(1+z)^3+\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}(1+z)^4}} =$$
$$= \frac{2}{a_0 H_0\sqrt{\Omega_M}}\mathcal{F}\left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}\right) \quad (8.50)$$

$\mathcal{F}$ считается:

$$\mathcal{F}\left(\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}\right) = \sqrt{\frac{1}{1+z_r}+\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} - \sqrt{\frac{\Omega_{rad}}{\Omega_M}} =$$
$$\left\backslash \frac{\Omega_M}{\Omega_{rad}} = 1+z_{eq} \bigstar \right\backslash = \sqrt{\frac{1}{1+z_r}+\frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}}$$
$$\mathcal{F} = 0.017 \quad (8.51)$$

Легко считается угол видимости горизонта рекомбинации:

$$\Delta\theta_r = \eta_r/\eta_0 = 0.019;\ \Delta\theta_r = 1.1^{\mathrm{o}} \quad (8.52)$$

$$\eta_{eq} = \frac{2}{a_0 H_0\sqrt{\Omega_M}}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1+z_{eq}}};\quad \mathcal{F} = 0.0076 \quad (8.53)$$

$$\frac{\eta_r}{\eta_{eq}} = 2.3;\ \frac{\eta_0}{\eta_{eq}} = 1.2\cdot 10^2 \quad (8.54)$$

η_r и η_{eq} близки, но не совпадают.

$$a_0\eta_{eq} = \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_M}}\frac{1}{\sqrt{1+z_{eq}}}(\sqrt{2}-1) \quad (8.55)$$

$$a_0\eta_r = \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_M}}\left(\sqrt{\frac{1}{1+z_r}+\frac{1}{1+z_{eq}}} - \sqrt{\frac{1}{1+z_{eq}}}\right) \quad (8.56)$$

$$a_0\eta_0 = \frac{2}{H_0\sqrt{\Omega_M}} I(\Omega_M);\quad I(\Omega_M) = 0.89 \quad (8.57)$$

$$a_0\eta_{eq} = \frac{a_0}{a_{eq}}\left(a_{eq}\eta_{eq}\right) = \frac{a_0}{a_{eq}}\, l_H^{eq} \quad (8.58)$$

– до каких размеров сейчас растянулся горизонт на момент перехода РД→ДМ. И т.д.

$$\begin{aligned} a_0\eta_{eq} &= 120\,\text{Мпк} && (8.59)\\ a_0\eta_r &= 510\,\text{Мпк} && (8.60)\\ a_0\eta_0 &= 14.1\,\text{Гпк} = 46.0\,\text{Млрд. св. лет} && (8.61) \end{aligned}$$

Космологические возмущения

Джинсовская неустойчивость

Ньютоновская гравитация + классическая гидродинамика нерелятивистсткой идеальной жидкости.

Гравитационный потенциал:

$$\boxed{\Delta\varphi = 4\pi G\rho} \tag{8.62}$$

Уравнение неразрывности:

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v}) = 0} \tag{8.63}$$

Уравнение Эйлера для идеальной жидкости:

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\rho\nabla\varphi - \nabla p \bigstar \tag{8.64}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{dx_i}{dt}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \Rightarrow \tag{8.65}$$

$$\boxed{\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\rho\nabla\varphi - \nabla p} \tag{8.66}$$

Начальные условия – бесконечная однородная статическая среда:

$$\rho(\mathbf{x}) = \mathrm{const},\ p(\mathbf{x}) = \mathrm{const},\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0,\ \varphi(\mathbf{x}) = 0 \tag{8.67}$$

[Заведомо нереалистично, т.к. $\Delta\varphi = 4\pi G\rho \neq 0$]

Изучаем малые возмущения.
Линеаризованные уравнения:
Из (8.62):

$$\Delta(\varphi + \delta\varphi) = 4\pi G(\rho + \delta\rho) \Rightarrow \tag{8.68}$$

$$\boxed{\Delta\delta\varphi = 4\pi G\delta\rho} \tag{8.69}$$

Из (8.63):

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}(\rho + \delta\rho) + \nabla[(\rho+\delta\rho)(\mathbf{v}+\delta\mathbf{v})] = \\ &\quad = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v} + \delta\rho\mathbf{v} + \rho\delta\mathbf{v} + \delta\rho\delta\mathbf{v}) = \\ &= \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\mathbf{v})\right] + \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \nabla(\rho\delta\mathbf{v}) = \frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\nabla\delta\mathbf{v} \Rightarrow\end{aligned} \tag{8.70}$$

$$\boxed{\frac{\partial\delta\rho}{\partial t} + \rho\nabla\delta\mathbf{v} = 0} \tag{8.71}$$

Из (8.66):

$$\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \simeq 0 - \text{2-й порядок малости} \tag{8.72}$$

$$\boxed{\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\nabla\delta p - \nabla\delta\varphi} \tag{8.73}$$

Уравнение состояния: $p = p(\rho)$

$$\delta p = \frac{\partial p}{\partial\rho}\delta\rho \equiv u_s^2\delta\rho \tag{8.74}$$

Из (8.71), подставляя $\partial\delta\mathbf{v}/\partial t$ из (8.73)

$$\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}+\rho\nabla\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial t}=$$
$$=\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}+\rho\nabla\left(-\frac{1}{\rho}\nabla\delta p-\nabla\delta\varphi\right)=\Big\backslash\nabla\delta p=\nabla\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\delta\rho\right)\Big\backslash=$$
$$=\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}+\rho\nabla\left(-\frac{1}{\rho}u_s^2\nabla\delta\rho-4\pi G\delta\rho\right)=$$
$$=\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}-u_s^2\nabla\delta\rho-4\pi G\rho\delta\rho=0 \quad (8.75)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2\delta\rho}{\partial t^2}-u_s^2\Delta\delta\rho-4\pi G\rho\delta\rho=0} \quad (8.76)$$

[Если $G=0$, то простое волновое уравнение]

Ищем решения в виде малых линейных волн:

$$\delta\rho(\mathbf{x},t)=\int d^3q\,e^{i[\mathbf{qx}-\omega(\mathbf{q})t]}\delta\rho(\mathbf{q})=\int d^3q\,e^{i\mathbf{qx}}\delta\rho(\mathbf{q},t) \quad (8.77)$$

$$\frac{\partial^2\delta\rho(\mathbf{x},t)}{\partial t^2}=\int[-\omega^2(\mathbf{q})]d^3qe^{i[\mathbf{qx}-\omega(\mathbf{q})t]}\delta\rho(\mathbf{q})$$
$$\Delta\delta\rho(\mathbf{x},t)=\int(-q^2)d^3qe^{i[\mathbf{qx}-\omega(\mathbf{q})t]}\delta\rho(\mathbf{q}) \quad (8.78)$$

Подставляем в (8.76):

$$\int[-\omega^2(\mathbf{q})+u_s^2q^2-4\pi G\rho]e^{i(\mathbf{qx}-\omega t)}\delta\rho(\mathbf{q})d^3q=0 \quad (8.79)$$

$\Rightarrow$ Закон дисперсии

$$\omega^2(\mathbf{q})=\omega^2(q)=u_s^2q^2-4\pi G\rho \quad (8.80)$$

Джинсовский «импульс» (волновое число) и длина волны

$$q_J=\sqrt{\frac{4\pi G\rho}{u_s^2}};\quad \lambda_J=\frac{2\pi}{q_J} \quad (8.81)$$

$$\lambda<\lambda_J\Rightarrow\omega^2(q)>0,\text{ волна} \quad (8.82)$$

$$\lambda<\lambda_J\Rightarrow\text{волновых решений нет} \quad (8.83)$$

$$\omega(q)=\pm i\sqrt{4\pi G\rho-u_s^2q^2}=\pm\Omega_q,\ \Omega_q>0 \quad (8.84)$$

$$\delta\rho(q,t)=\delta\rho(q,0)e^{\pm\Omega_q t} \quad (8.85)$$

Экспоненциально растущее и экспоненциально падающее решения – гравитационная неустойчивость Джинса.

Если $u_s=0$ (пыль) то колебательных решний нет совсем.

Линейный и нелинейный режимы:

$$\delta(\mathbf{q},t)\equiv\frac{\delta\rho(\mathbf{q},t)}{\rho} \quad (8.86)$$

Если $\delta(\mathbf{q},t)\ll 1$ работает линейный анализ (представление Фурье).

Время входа в нелинейный режим определеяется условием

$$\delta(\mathbf{q},t_{nl})\sim 1 \quad (8.87)$$

Режим роста вообще говоря не экспоненциальный, но условия выхода в нелинейный режим всегда такие.

Возмущения метрики и фиксация калибровки $h_{0i} = 0$

$$ds^2 = a^2(\eta)\gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{8.88}$$

$$\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{8.89}$$

$\eta_{\mu\nu}$ – Минковский, $h_{\mu\nu}$ – возмущение.
Соглашение: Индексы возмущений будем поднимать/опускать метрикой Минковского:

$$h^{\mu\nu} = \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\lambda}h_{\rho\lambda} \text{ и т.д.} \tag{8.90}$$

Если $\gamma_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, то $\gamma^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$ ($\bigstar$)

Теория инвариантна относительно калибровочных преобразований – произвольных диффеоморфизмов. Рассматриваем произвольные инфинитеземальные преобразования

$$\tilde{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x), \;\; \xi^\mu \sim h^{\alpha\beta} \tag{8.91}$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \nabla^\mu\xi^\nu + \nabla^\nu\xi^\mu \;\bigstar \tag{8.92}$$

Как преобразуются $h^{\mu\nu}$? Используем (8.92):

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2}(\eta^{\mu\nu} - \tilde{h}^{\mu\nu}) = \\ = \frac{1}{a^2}(\eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}) + g^{\mu\lambda}\nabla_\lambda\xi^\nu + g^{\nu\lambda}\nabla_\lambda\xi^\mu \tag{8.93}$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\nu + (\eta^{\nu\lambda} - h^{\nu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\mu \tag{8.94}$$

$$(\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\nu \simeq \eta^{\mu\lambda}\nabla_\lambda\xi^\nu = \eta^{\mu\lambda}(\partial_\lambda\xi^\nu + \Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\xi^\sigma) = \\ = \partial^\mu\xi^\nu + \eta^{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\xi^\sigma \tag{8.95}$$

$\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}$ достаточно считать в 0-порядке:

$$\Gamma^\nu_{\sigma\lambda} = \frac{1}{2}g^{\nu\rho}(\partial_\sigma g_{\lambda\rho} + \partial_\lambda g_{\rho\sigma} - \partial_\rho g_{\sigma\lambda}) = \\ = \frac{1}{2}\frac{1}{a^2}\eta^{\nu\rho}[\partial_\sigma(a^2\eta_{\lambda\rho}) + \partial_\lambda(a^2\eta_{\rho\sigma}) - \partial_\rho(a^2\eta_{\sigma\lambda})] = \\ = \frac{1}{a}(\partial_\sigma a\,\delta^\nu_\lambda + \partial_\lambda a\,\delta^\nu_\sigma - \partial_\rho a\,\eta^{\nu\rho}\eta_{\sigma\lambda}) \tag{8.96}$$

$$\eta^{\mu\lambda}\Gamma^\nu_{\sigma\lambda}\xi^\sigma = \frac{1}{a}(\partial_\sigma a\,\xi^\sigma\eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda a\,\eta^{\mu\lambda}\xi^\nu - \partial_\rho a\,\eta^{\nu\rho}\xi^\mu) \tag{8.97}$$

$$(\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\nu = \\ = \partial^\mu\xi^\nu + \frac{1}{a}(\partial_\sigma a\,\xi^\sigma\eta^{\mu\nu} + \partial_\lambda a\eta^{\mu\lambda}\xi^\nu - \partial_\rho a\eta^{\nu\rho}\xi^\mu) \tag{8.98}$$

$$(\eta^{\nu\lambda} - h^{\nu\lambda})\nabla_\lambda\xi^\mu = \\ = \partial^\nu\xi^\mu + \frac{1}{a}(\partial_\sigma a\,\xi^\sigma\eta^{\nu\mu} + \partial_\lambda a\eta^{\nu\lambda}\xi^\mu - \partial_\rho a\eta^{\mu\rho}\xi^\nu) \tag{8.99}$$

$$\tilde{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + \partial^\mu\xi^\nu + \partial^\nu\xi^\mu + 2\eta^{\mu\nu}\xi^\sigma\frac{\partial_\sigma a}{a} \tag{8.100}$$

Так как ξ^μ есть 4 произвольные функции, то их выбираем так, чтобы занулить 3 величины $h_{i0} = 0, \; i = 1, 2, 3$.

Остается еще остаточная инвариантность для преобразований

$$\partial_0\xi_i + \partial_i\xi_0 = 0 \tag{8.101}$$

$$\xi_i = \xi_i(\mathbf{x}), \;\; \xi_0 = 0 \tag{8.102}$$

В калибровке $h_{i0}=0$:

$$\boxed{ds^2 = a^2(\eta)[(1+h_{00})d\eta^2 - (\delta_{ik}+h_{ik})dx_i dx_k].} \tag{8.103}$$

<u>Соглашение:</u> для трехмерных величин индексы опускаются трехмерной метрикой δ_{ij}

$$v_i = \delta_{ij}v^j = v^i \tag{8.104}$$

Для наблюдателя, покоящегося в сопутствующей системе, $dx_i = 0 \Rightarrow$

$$ds^2 = d\tau^2 = a^2(\eta)(1+h_{00})d\eta^2 \Rightarrow \tag{8.105}$$

$$d\tau = a(\eta)(1+\frac{1}{2}h_{00})d\eta \tag{8.106}$$

Возмущения тензора энергии-импульса

ТЭИ идеальной жидкости:

$$T^\mu_\nu = (\rho+p)u^\mu u_\nu - \delta^\mu_\nu p \tag{8.107}$$

С возмущениями:

$$T^\mu_\nu = (\rho+\delta\rho+p+\delta p)(u^\mu+\delta u^\mu)(u_\nu+\delta u_\nu) - \delta^\mu_\nu(p+\delta p) \tag{8.108}$$

<u>*Скорость в контексте космологических возмущений*</u>

Невозмущенная (координатная) скорость имеет только
0-компоненту: $u^\mu = (u^0, 0, 0, 0)$

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1 \Rightarrow a^2\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = a^2u^0u^0 = 1 \Rightarrow$$

$$u^0 = \frac{1}{a};\quad u_0u^0 = 1 \Rightarrow u_0 = a \tag{8.109}$$

Физические скорости:

$$dX^\mu = adx^\mu \Rightarrow V^\mu = \frac{dX^\mu}{ds} = a\frac{dx^\mu}{ds} = au^\mu \tag{8.110}$$

$$V^0 = au^0 = 1;\quad V^i = au^i = 0; \tag{8.111}$$

Возмущенная скорость:

$$\hat{V}^0 = V^0 + v^0 = 1 + v^0 \tag{8.112}$$

$$\hat{V}^i = V^i + v^i = v^i - \text{физическая скорость} \tag{8.113}$$

v^0 и v^i – величины первого порядка малости.

$$\hat{V}^\mu = a\hat{u}^\mu \tag{8.114}$$

$$\hat{u}^0 \equiv u^0 + \delta u^0 = \frac{1}{a}(1+v^0) \tag{8.115}$$

$$\hat{u}^i \equiv u^i + \delta u^i \equiv \delta u^i = \frac{1}{a}v^i \tag{8.116}$$

Тогда

$$\begin{aligned}1 = g_{\mu\nu}\hat{u}^\mu\hat{u}^\nu = a^2[(\eta_{00}+h_{00})\hat{u}^0\hat{u}^0 - (\delta_{ij}+h_{ij})\hat{u}^i\hat{u}^j] = \\ = a^2(1+h_{00})\frac{1}{a^2}(1+v^0)^2 - (\delta_{ij}+h_{ij})\delta u^i\delta u^j \cong \\ \cong (1+h_{00})(1+v^0)^2 \cong 1 + h_{00} + 2v^0 \Rightarrow\end{aligned} \tag{8.117}$$

$$\boxed{v^0 = -\frac{1}{2}h_{00}} \tag{8.118}$$

В линейном порядке это есть гравитационное замедление времени. Даже если $v^i = 0$ время замедляется.

$$\boxed{v^i \text{ могут быть любыми (малыми)}} \tag{8.119}$$

Компоненты ТЭИ

u_μ и δu_μ (с нижними индексами):

$$\hat{u}_\mu \hat{u}^\mu = (u_0 + \delta u_0)(u^0 + \delta u^0) + \delta u_i \delta u^i \cong$$
$$\cong (u_0 + \delta u_0)(u^0 + \delta u^0) = 1 \Rightarrow \quad (8.120)$$

$$u_0 + \delta u_0 = \frac{1}{u^0 + \delta u^0} = a(1 - v^0) \quad (8.121)$$

$$\delta u_i = g_{i\mu}\delta u^\mu \cong a^2 \eta_{i\mu}\delta u^\mu = -a^2 \delta u^i = -a^2 \frac{1}{a} v^i = -a v^i \quad (8.122)$$

$$T^0_0 = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)\frac{1}{a}(1 + v_0)a(1 - v_0) - \delta^0_0 (p + \delta p) =$$
$$= \rho + \delta\rho \text{ в первом порядке} \Rightarrow \quad (8.123)$$

$$\boxed{\delta T^0_0 = \delta\rho} \quad (8.124)$$

$$T^0_i = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)\frac{1}{a}(1 + v_0)(-a v_i) - \delta^0_i (p + \delta p) \cong$$
$$\cong (\rho + p + \delta\rho + \delta p)(-v_i) \cong -(\rho + p)v_i \Rightarrow \quad (8.125)$$

$$\boxed{\delta T^0_i = -(\rho + p)v_i} \quad (8.126)$$

$$T^i_j = (\rho + \delta\rho + p + \delta p)\frac{1}{a}v^i(-a v_j) - \delta^i_j (p + \delta p) \cong$$
$$\cong -\delta^i_j p - \delta^i_j \delta p \Rightarrow \quad (8.127)$$

$$\boxed{\delta T^i_j = -\delta^i_j \delta p} \quad (8.128)$$