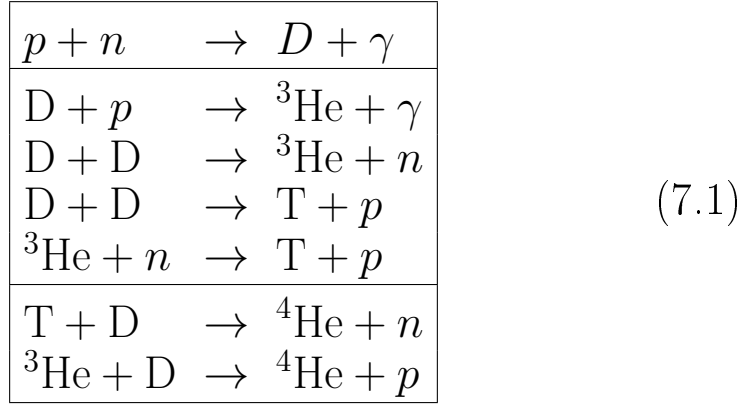


Лекция 7

Синтез первичного гелия. Темная материя и закалка темной материи. Рекомбинация электронов.

Синтез гелия

Термодинамически выгодным является продолжение синтеза D до ${}^4\text{He}$.



Концентрация адронов, связанных в ядре (A, Z) (формула (6.82)):

$$X_A = g_A X_p^Z X_n^{A-Z} 2^{-A} A^{5/2} \eta_B^{A-1} \left(\frac{2.5T}{m_p} \right)^{\frac{3}{2}(A-1)} e^{\Delta A/T} \quad (7.2)$$

Оценим равновесные концентрации всех прочих ядер, считая, что концентрация ${}^4\text{He} \sim 1$
Из (6.82):

$$X_{4\text{He}} \sim X_p^2 X_n^2 \eta_B^3 \left(\frac{2.5T_{NS}}{m_p} \right)^{9/2} e^{\Delta_{4\text{He}}/T_{NS}} \quad (7.3)$$

Считаем $X_p^2 \sim 1$, выражаем X_n :

$$X_n \sim X_{4\text{He}}^{1/2} \eta_B^{-3/2} \left(\frac{2.5T_{NS}}{m_p} \right)^{-9/4} e^{-\Delta_{4\text{He}}/2T_{NS}} \quad (7.4)$$

Подставляем X_n в (6.82) для произвольного ядра (A, Z) , считая $X_{4\text{He}} \sim 1$:

$$\begin{aligned} X_A &\sim \left[\eta_B \left(\frac{2.5T_{NS}}{m_p} \right)^{3/2} \right]^{\frac{3}{2}Z - \frac{1}{2}A - 1} \times \\ &\quad \times \exp \left(\frac{\Delta_A - \Delta_{4\text{He}}(A-Z)/2}{T_{NS}} \right) \approx \\ &\approx 10^{7.4(A+2-3Z)} \exp \left\{ \frac{(A-Z)[\Delta_A/(A-Z) - \Delta_{4\text{He}}/2]}{T} \right\} \end{aligned} \quad (7.5)$$

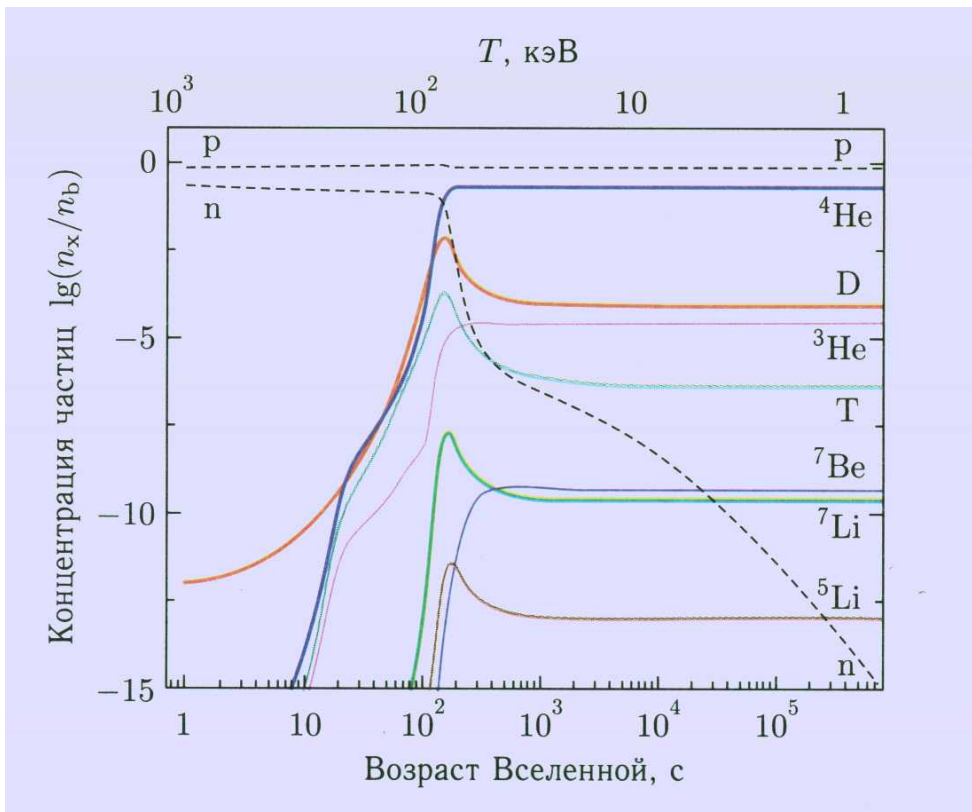
Только для ${}^4\text{He}$ экспонента ~ 1 .
Для всех других ядер

$$\Delta_A/(A-Z) - \Delta_{4\text{He}}/2 < 0 \quad (7.6)$$

и экспонента очень мала.
При $T_{NS} = 65$ кэВ из (7.5):

$$X_D \sim 10^{-79}, \quad X_{3\text{H}} \sim 10^{-118}, \dots \quad (7.7)$$

Это равновесные концентрации, но в действительности для большинства реакций равновесия нет.
Но качественный вывод верен – ${}^4\text{He}$ сильно преобладает из-за высокой энергии связи на нуклон.



Остаточная концентрация ${}^4\text{He}$

Все нейтроны, не распавшиеся к $t_{NS} = 4.5$ мин, входят в ${}^4\text{He}$.

$$n_{4He}(t_{NS}) = \frac{1}{2}n_n(t_{NS}) \quad (7.8)$$

$$\frac{n_n(t_{NS})}{n_p(t_{NS})} \cong 0.2 \cdot e^{-t_{NS}/\tau_n} \approx \frac{1}{7} \quad (\tau_n = 886 \text{ сек}) \quad (7.9)$$

Массовая доля ${}^4\text{He}$:

$$\begin{aligned} X_{4He} &= \frac{m_{4He}n_{4He}}{m_p(n_p + n_n)} = \frac{4 \cdot \frac{1}{2}n_n(t_{NS})}{n_p + n_n} = \\ &= \frac{2}{\frac{n_p(t_{NS})}{n_n(t_{NS})} + 1} \approx 25\% \quad (7.10) \end{aligned}$$

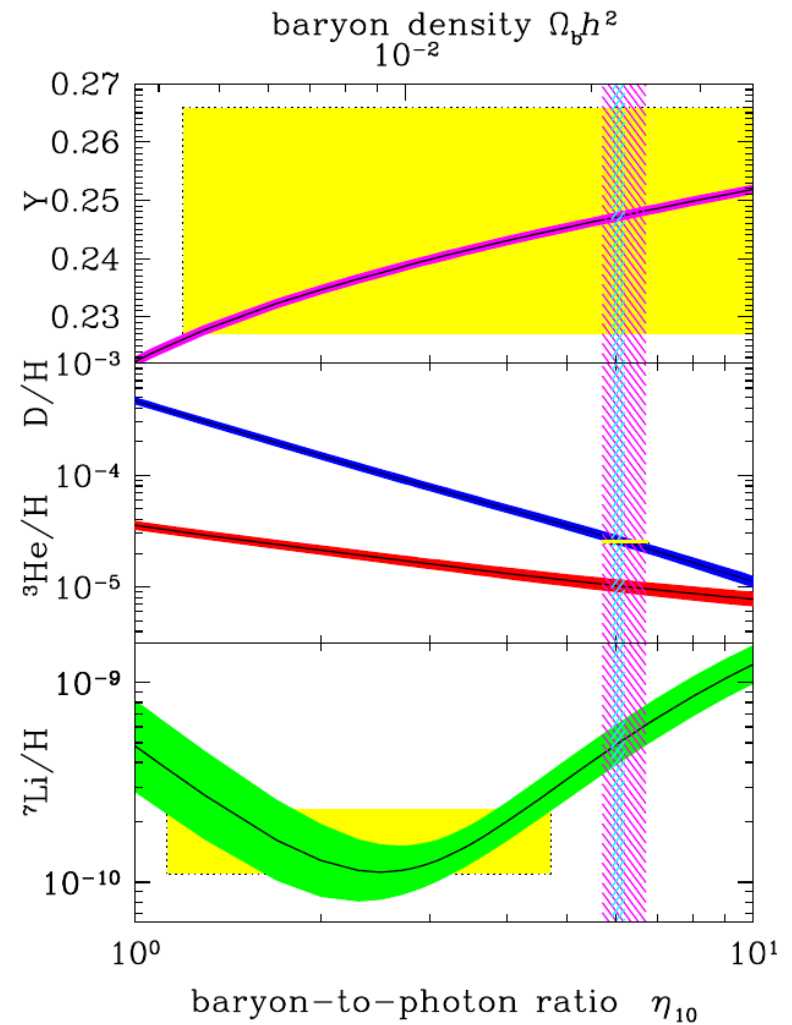
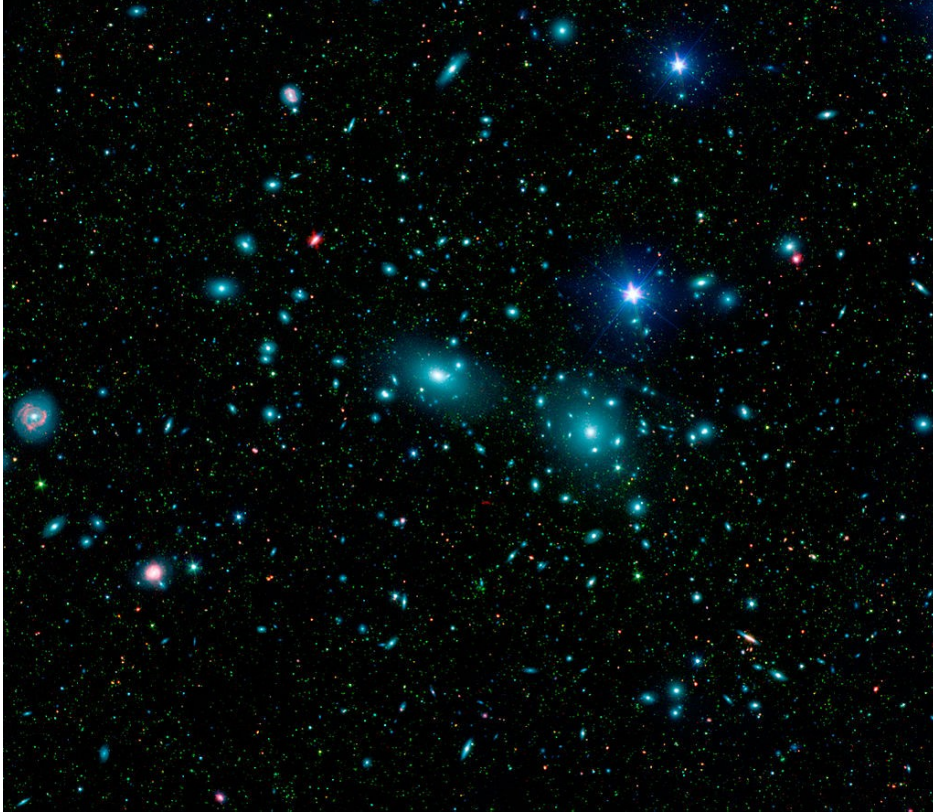


Figure 23.1: The abundances of ${}^4\text{He}$, D, ${}^3\text{He}$, and ${}^7\text{Li}$ as predicted by the standard model of Big-Bang nucleosynthesis — the bands show the 95% CL range. Boxes indicate the observed light element abundances. The narrow vertical band indicates the CMB measure of the cosmic baryon density, while the wider band indicates the BBN concordance range (both at 95% CL).

$$Y = \frac{2(n/p)}{1 + n/p} \quad (7.11)$$

Темная материя

1. Скорости галактик в скоплениях Фриц Цвикки, 1937. Скопление Кома (Волосы Вероники): Масса скопления в десятки раз превышает массу видимого вещества. «Темная материя» – термин Цвикки. F. Zwicky. 1937, ApJ, 86, 217.



2. Плоские кривые вращения галактик

Ожидается $V \propto \sqrt{R}$

Туманность Андромеды (Хорес Бэбкок, 1939)

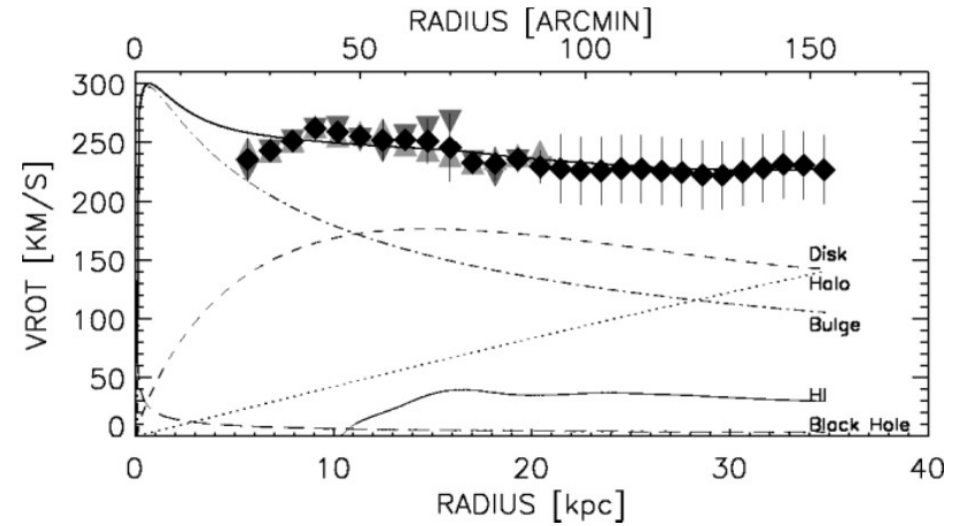
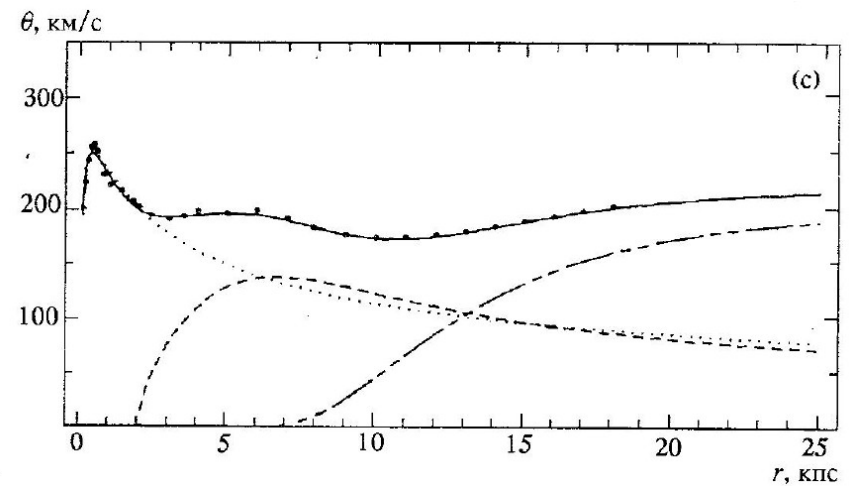


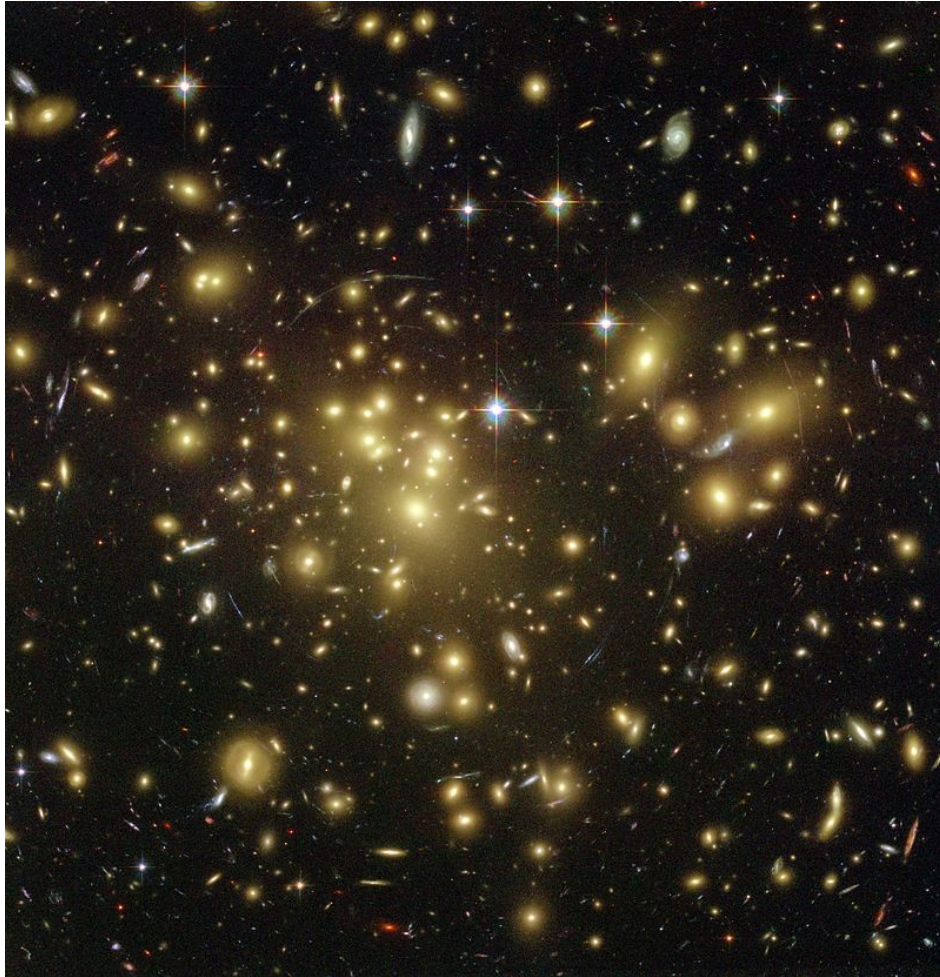
FIG. 2.—Rotation curve and mass model for M31. The new rotation velocities from the Effelsberg and GBT 100 m observations are for $R > 21$ kpc.

Млечный Путь



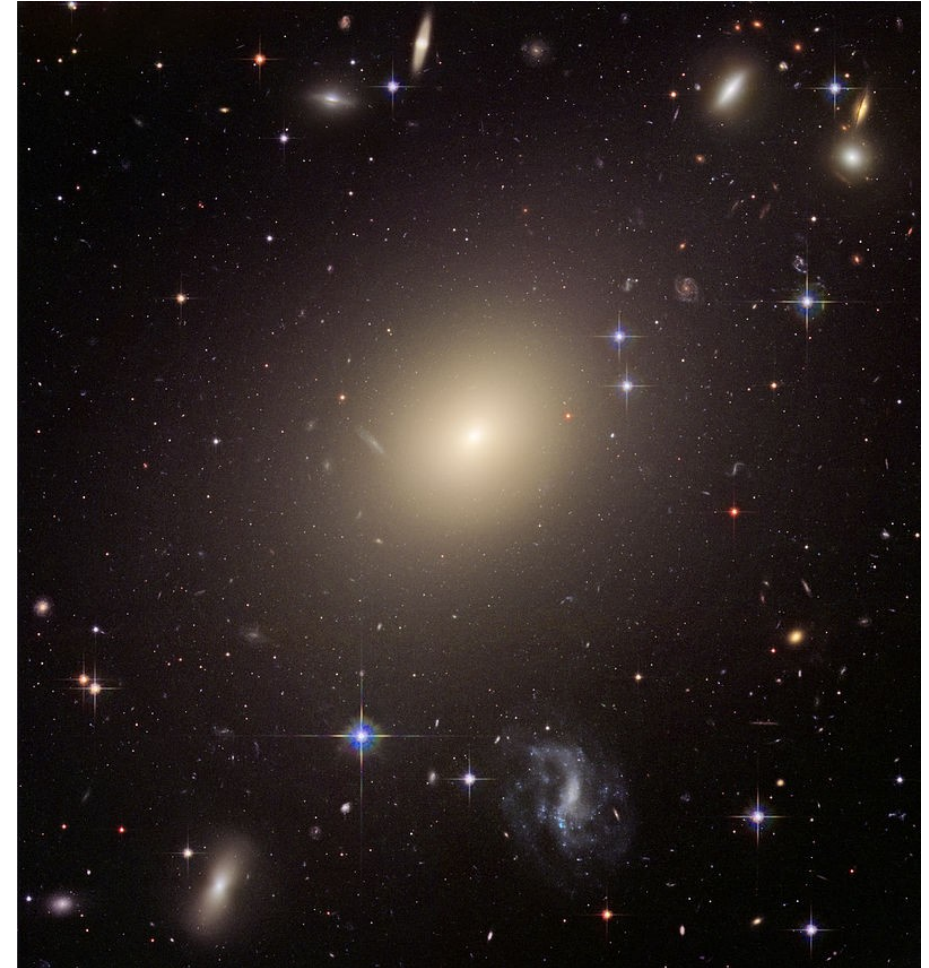
3. Сильное гравитационное линзирование скоплениями галактик

Дает результаты, согласующиеся с измерением скоростей в скоплениях галактик.



Скопления галактик Abell 1689. Снимок космического телескопа Хаббл (HST). Галактики самого скопления изображены жёлтым цветом. Галактики на заднем фоне (синие и красные) изогнуты в длинные дуги.

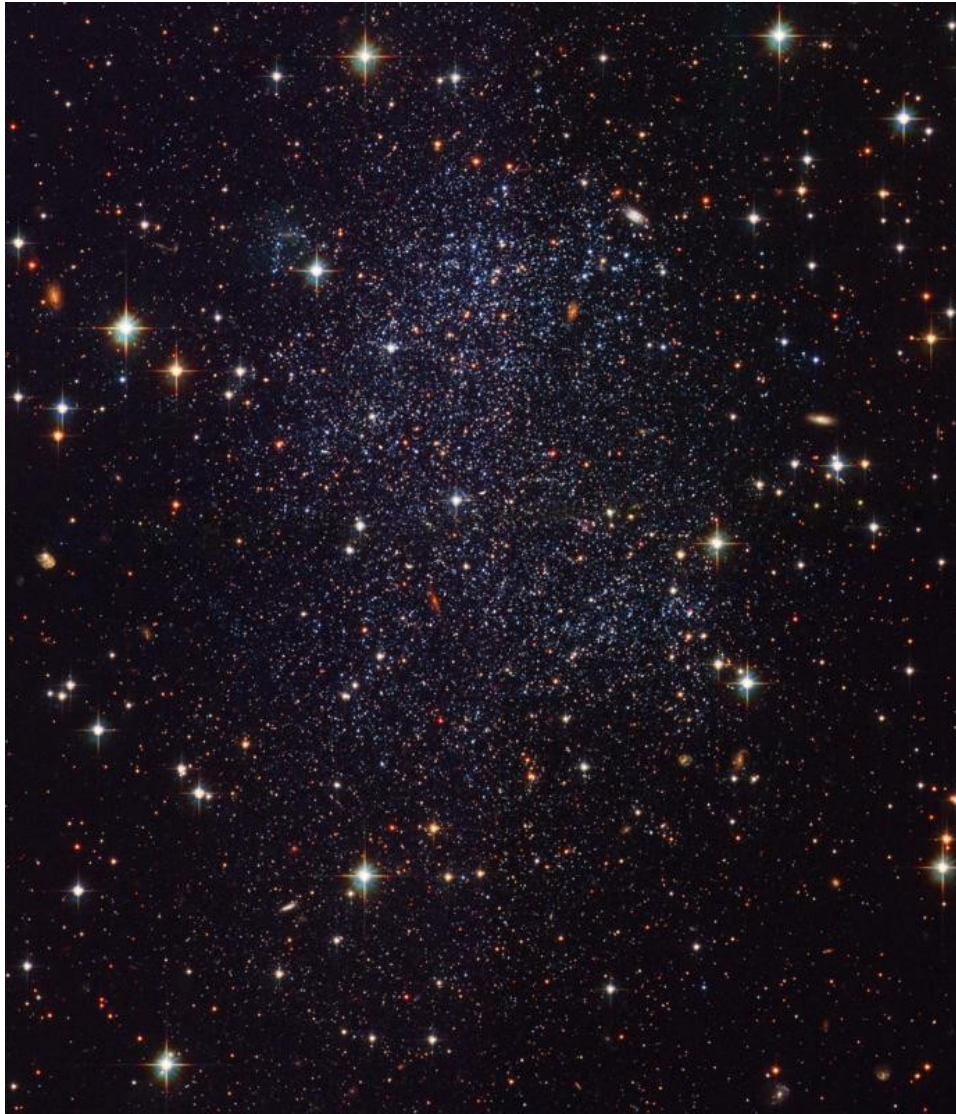
4. Удержание горячего газа эллиптическими галактиками



Эллиптическая галактика ESO 325-G004
Гравитационного поля одних только звезд и газа недостаточно для удержания горячего газа эллиптической галактики.

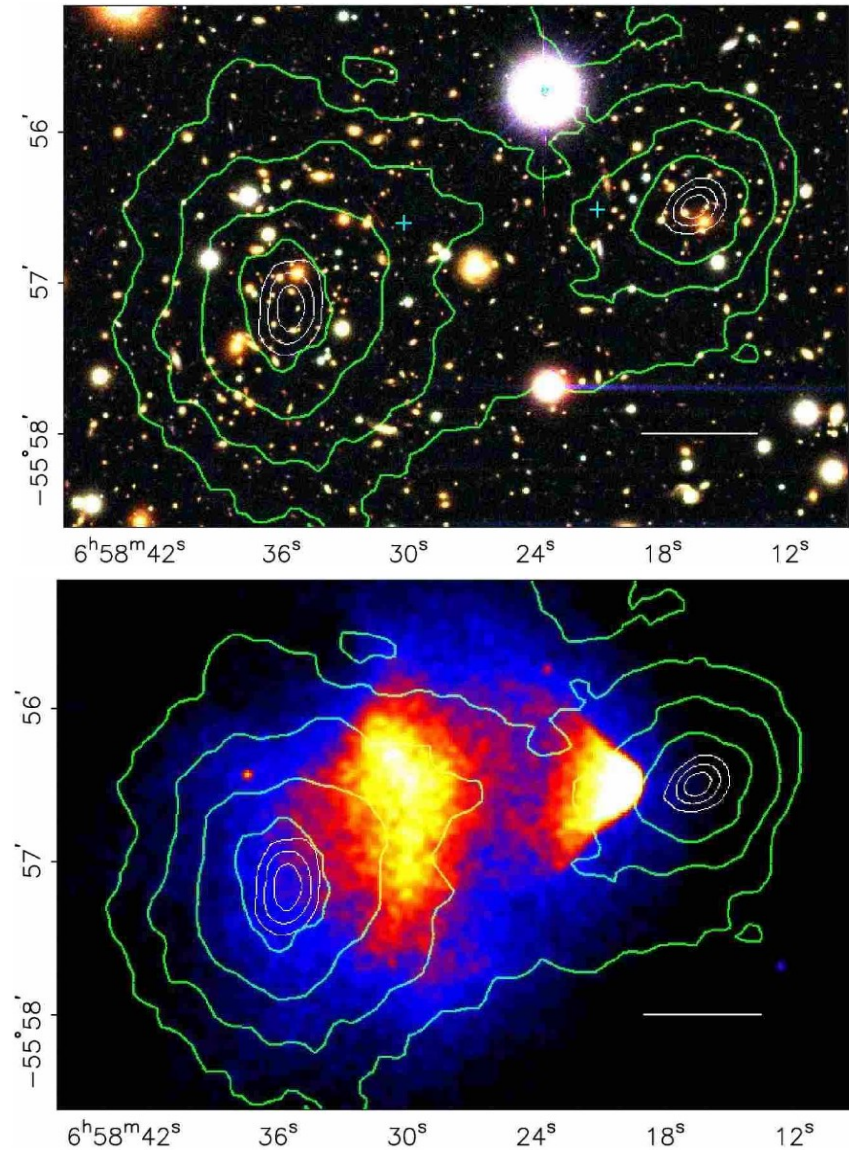
5. Карликовые галактики низкой поверхностной яркости

Состоят на $> 95\%$ из невидимого вещества.



Карликовая неправильная галактика в Стрельце.

6. Сталкивающиеся кластеры галактик: распределение масс вещества отличается от распределения масс, определенного по гравитационному линзированию



Распределение горячего газа, X-ray

Astrophys.J.648:L109-L113,2006 (astro-ph/0608407)

Что такое темная материя?

MOND (MOdified Newtonian Dynamics) и другие модифицированные теории гравитации.

Темная материя – *не материя*, а модификация закона тяготения при малых ускорениях/больших расстояниях.

Проблема: недостаточная универсальность.

- Центр тяготения всегда должен быть совмещен с центром масс барионной материи, что иногда не так (например, в парах взаимодействующих галактических кластеров).
- Отношение гравитирующей материи к барионной материи должно быть постоянным, что не так.

Темная материя – «материя»

- Небарионная. Крупные объекты давали бы интенсивное микролинзирование, мелкие объекты – интенсивное поглощение и рассеяние света.
- Электрически нейтральная. Заряженная темная материя интенсивно излучала бы или поглощала э.м. излучение. Коллапсировала бы в крупные объекты.
- Если это частицы, то взаимодействуют только слабо и гравитационно – WIMPy (Weakly Interacting Massive Particles) в широком смысле.

Холодная, теплая и горячая ТМ

- *Холодная темная материя.* Выход из термодинамического равновесия при температуре $T_f < M_\chi$. Имеет место для $m_\chi \gtrsim 30$ КэВ. WIMPy (Weakly Interacting Massive Particles) в узком смысле.
- *Теплая темная материя.* Массы между ~ 1 эВ и 30 КэВ. Частицы не являются релятивистскими на момент перехода от РД к ДМ стадии ($T_{eq} \sim 1$ эВ), но являются релятивистскими на момент замораживания.
- *Горячая темная материя.* $M_\chi < 1$ эВ. Частицы УР на момент перехода от РД к ДМ стадии.

Основные кандидаты

- Нейтралино – легчайшая SUSY частица, смесь суперпартнёров Z-бозона, фотона и бозона Хиггса.
 $M_X \sim n \times GeV$
- Снейтрино – легчайший суперпартнер нейтрино.
 $M_X \sim n \times GeV$
- Гравитино – суперпартнер гравитона (\Rightarrow гравитация – калибровочная теория по группе Пуанкаре \Rightarrow теория Эйнштейна-Картана).
 $M_X \sim n \times GeV$
- Аксионоподобные частицы (аксион – решает проблему возможного сильного нарушения CP-инвариантности в хромодинамике).
 $M_X \sim n \times keV$
- Всякая экзотика. Топологические солитоны, зеркальная материя, микро/мини-дыры. ... $M_X = ?$

Ограничение по массе для частиц теплой темной материи

В диапазоне температур $T_f > T > M_X$ частицы уже свободны, но еще релятивистские.

Это приводит к сглаживанию начальных неоднородностей ТМ («перемешивание») \Rightarrow амплитуды возмущений на малых масштабах малы.

Перемешивание прекращается при $T \sim M_X$. Размер горизонта на этот момент определяет размер областей сейчас, где возмущения подавлены.

Т.к. для теплой ТМ перемешивание кончается на РД стадии \Rightarrow

$$l_{Hor} \sim \frac{1}{H} = \frac{M_{Pl}^*}{T^2} \sim \frac{M_{Pl}^*}{M_X^2} \quad (7.12)$$

Этот размер сейчас:

$$l_{Hor,0} = l_{Hor}(1+z) = l_{Hor} \frac{T}{T_0} \sim \frac{M_{Pl}^*}{M_X T_0} \quad (7.13)$$

Электроны уже нерелятивистские:

$$g_* = 2 + \frac{7}{8} \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} = 3.36 \Rightarrow \quad (7.14)$$

$$M_{pl}^* = \frac{M_{Pl}}{1.66\sqrt{g_*}} = 4 \cdot 10^{18} \text{ ГэВ.} \quad (7.15)$$

$$M_X \sim 1 \text{ эВ} \Rightarrow l_{Hor,0} \sim 100 \text{ Мпк} \quad (7.16)$$

– СЛИШКОМ МНОГО.

$$M_X \sim 1 \text{ кэВ} \Rightarrow l_{Hor,0} \sim 0.1 \text{ Мпк} \quad (7.17)$$

– разумно, т.к. приводит к структурам типа карликовых галактик \Rightarrow

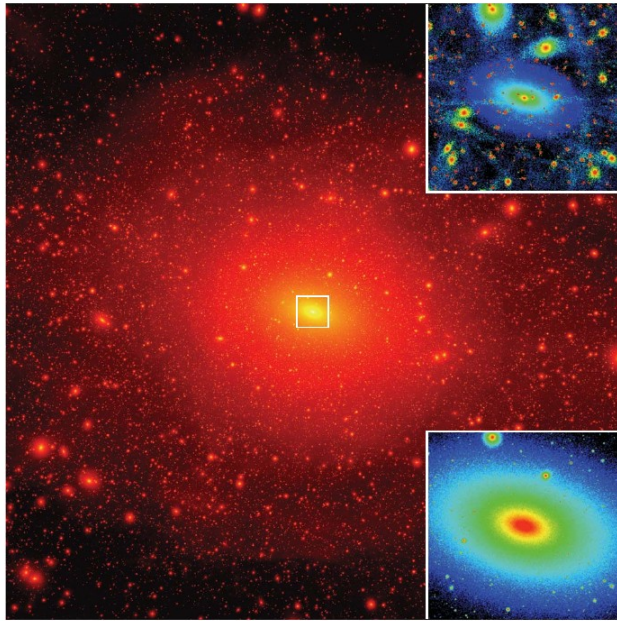
$$M_X \gtrsim 1 \text{ кэВ} \quad (7.18)$$

Теплая темная материя $1 \text{ кэВ} < M_X < 30 \text{ кэВ}$ не исключена!

Но предпочтительной считается холодная темная материя $M_X > 30 \text{ кэВ}$

Ограничение сверху на массу «частиц»:
 $M_X \lesssim 10^3 M_\odot$ – по разрушению звездных скоплений.

Проблема каспов холодной темной материи



Темная материя должна концентрироваться в компактных сгущениях с «сингулярностями» в центре (cusps, каспы), но никаких признаков каспов в Галактике не обнаружено.

Закалка холодной темной материи

Предположения:

- X стабильны
- Находятся в равновесии до температур $T < M_X$
- $n_X - n_{\bar{X}} = 0$

При $T < M_X$, в равновесии

$$n_X = n_{\bar{X}} = g_X \left(\frac{M_X T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-M_X/T} \quad (7.19)$$

Уменьшение числа частиц ТМ в сопутствующем объеме возможно только за счет аннигиляции:
 $X + \bar{X} \rightarrow$ легкие частицы.

После окончания аннигиляции количество частиц в сопутствующем объеме постоянно (с точностью до возможного распада X). $T_f = ?$

Время пробега до аннигиляции

$$\tau = \frac{1}{n_X} \frac{1}{\langle \sigma_{ann} v \rangle} \quad (7.20)$$

Условие замораживания числа частиц X :

$$\tau(T_f) = \frac{1}{n_X(T_f)} \frac{1}{\langle \sigma_{ann}(T_f) v(T_f) \rangle} = \frac{1}{H(T_f)} \quad (7.21)$$

Аннигиляция в s -волне (закон Бете):

$$\sigma_{ann}(v) = \frac{\sigma_0}{v}; \quad \sigma_0 = \text{const} \Rightarrow \langle \sigma_{ann} v \rangle = \sigma_0 \Rightarrow \quad (7.22)$$

$$\frac{1}{n_X} \frac{1}{\sigma_0} = \frac{1}{H(T_f)} = \left(\frac{T_f^2}{M_{pl}^*} \right)^{-1} \quad (\text{РД стадия!}) \quad (7.23)$$

Подставляем в (7.19):

$$\frac{1}{\sigma_0} \frac{1}{g_X} \left(\frac{2\pi}{M_X T_f} \right)^{3/2} e^{M_X/T_f} = \frac{M_{Pl}^*}{T_f^2} \Rightarrow \quad (7.24)$$

$$\frac{M_X}{T_f} = \ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \cdot \left(\frac{M_X}{T_f} \right)^{1/2} \right] \quad (7.25)$$

Уравнение типа

$$x = \ln(Ax^\alpha) \quad (7.26)$$

$A = ?$

Область взаимодействия $a^2 \sim \sigma_0$

$$a \sim \lambda_C(M_X) = \frac{1}{M_X} \Rightarrow \Rightarrow \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \sim \frac{M_{Pl}^*}{M_X} \gtrsim 10^{13}; \quad \ln(A) \gtrsim 30 \quad (7.27)$$

Решаем (7.26) методом итераций, $\alpha = 1/2$:

$$x_0 = 1 \quad (7.28)$$

$$x_1 = \ln(A) \quad (7.29)$$

$$x_2 = \ln(A) + 0.5 \ln(\ln(A)) \quad (7.30)$$

$0.5 \ln(\ln(A)) \sim 1.5 \Rightarrow$ можно ограничиться приближением x_1 («решение в логарифмическом порядке») \Rightarrow

$$\frac{M_X}{T_f} \approx \ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right] \Rightarrow \quad (7.31)$$

$$T_f = \frac{M_X}{\ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right]} \quad (7.32)$$

$$T_f = \frac{M_X}{\ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right]} \quad (7.33)$$

Знаменатель $\gtrsim 30 \Rightarrow T_f \ll M_X \Rightarrow$ ТМ действительно холодная.

По формуле (7.33), подбирая подходящий вес g_* :

M_X	T_f	t_f
1 ГэВ	0.048 ГэВ	$1 \cdot 10^{-4}$ сек
100 ГэВ	3.9 ГэВ	$1.6 \cdot 10^{-8}$ сек
10 ТэВ	330 ГэВ	$2.2 \cdot 10^{-12}$ сек

Найдем n_X , но не будем пользоваться (7.19), т.к. T_f в (7.33) получено только с логарифмической точностью.

Из (7.21):

$$n_X(T_f) = \frac{H(T_f)}{\sigma_{ann} v} = \frac{1}{\sigma_0} \frac{T_f^2}{M_{Pl}^*} \quad (7.34)$$

Настоящее время:

$$n_X(t_0) = \left(\frac{a(t_f)}{a(t_0)} \right)^3 n_X(T_f) \quad (7.35)$$

$$s a^3 = \text{const} \Rightarrow s \sim \frac{1}{a^3} \Rightarrow \quad (7.36)$$

$$n_X(t_0) = \frac{s_0}{s(t_f)} n_X(t_f) \quad (7.37)$$

$$s_0 = \frac{4\pi}{90}(2T_\gamma^3 + 2 \cdot 3 \cdot T_\nu^3) \approx 2.8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3} \quad (7.38)$$

$$s(t_f) = g_*(t_f) \frac{4\pi^2}{90} T_f^3 \Rightarrow \quad (7.39)$$

$$n_X(t_0) = \frac{s_0}{s(t_f)} \frac{1}{\sigma_0} \frac{T_f^2}{M_{Pl}^*} = \left\langle M_{Pl}^* = \frac{M_{Pl}}{1.66\sqrt{g_*(t_f)}} \right\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sigma_0} \frac{s_0}{\sqrt{g_*(t_f)} T_f M_{Pl} \left(\frac{4\pi^2}{1.66 \cdot 90} \right)} = 3.8 \frac{s_0}{T_f \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}} \quad \star \quad (7.40)$$

$$n_X(t_0) = 3.8 \frac{s_0}{T_f \sigma_0 M_{Pl} \sqrt{g_*(t_f)}} \quad (7.41)$$

Найдем Ω_X . Подставляя T_f из (7.33):

$$\Omega_X = 2 \cdot \frac{M_X n_X(t_0)}{\rho_c} = \left\langle 2 - \text{из } X + \bar{X} \right\rangle =$$

$$= \left\langle s_0 = 2.8 \cdot 10^3 \text{ см}^{-3}; M_{Pl} = 1.2 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ}; \right.$$

$$\left. \rho_c = 1.88 \cdot 10^{-29} h^2 \frac{\Gamma}{\text{см}^2} \right\rangle =$$

$$= \frac{3 \cdot 10^{-10}}{(\sigma_0 / \text{ГэВ}^{-2}) \sqrt{g_*(t_f)}} \ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right] \frac{1}{2h^2} \quad \star \quad (7.42)$$

Уравнение (7.42) перепишем как уравнение для σ_0 :

$$\sigma_0 = \frac{1}{\Omega_X} \times \frac{3 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{g_*(t_f)}} \ln \left[\frac{g_X}{(2\pi)^{3/2}} \sigma_0 M_X M_{Pl}^* \right] \frac{1}{2h^2} \quad (7.43)$$

$\Omega_X = 0.26$ – известно.

$g_* = 10 \div 100$ – в зависимости от T_f

(7.43) решается методом итераций (4 итерации дают 6 значащих цифр):

$$\begin{aligned} M_X = 1 \text{ ГэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.76 \div 2.5) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \\ M_X = 100 \text{ ГэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.82 \div 2.7) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \\ M_X = 10 \text{ ТэВ} &\Rightarrow \sigma_0 = (0.88 \div 2.9) \cdot 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Сечение очень слабо зависит от M_X и сравнимо со слабым сечением при энергиях ~ 100 ГэВ:

$$\sigma_w \sim \alpha_w / M_W^2 \sim 10^{-7} \text{ ГэВ}^{-2} \quad (7.45)$$

$$\sigma_0 \sim a^2 \sim \frac{1}{M_X^2} \Rightarrow M_X \sim \frac{1}{\sqrt{\sigma_0}} \sim 10 \text{ ТэВ} \quad (7.46)$$

Тяжелая частица со слабым взаимодействием – WIMP.

В современную эпоху, для астрофизических n_X :

$$\tau_{ann} = \frac{1}{n_X} \frac{1}{\langle \sigma_{ann} v \rangle} \quad (7.47)$$

$$\sigma_{ann} = \frac{\sigma_0}{v} \Rightarrow \langle \sigma_{ann} v \rangle = \sigma_0 \sim 10^{-8} \text{ ГэВ}^{-2} \quad (7.48)$$

Это значение используется для вычисления сигнала аннигиляции темной материи в современных условиях.

n_X , естественно, зависит от M_X .

n_X зависит от того, куда смотрим: внутренние области Галактики, внешние области, каспы и т.д.

Сечения (7.48) на 2-3 порядка не хватает, чтобы объяснить наблюдаемый поток позитронов в космических лучах \Rightarrow «буст-фактор».

Рекомбинация электронов и последнее рассеяние фотонов

Температура рекомбинации

Энергия связи электрона в водороде 13.6 эВ.
Температура рекомбинации масштаба 13 эВ?

- Предполагаем, что все ядра – протоны.
- Предполагаем, что рекомбинация идет равновесно.
- $T \sim 10$ эВ $\Rightarrow p^+$ и e^- – нерелятивистские

$$n_e = g_e \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_e - m_e)/T}; \quad g_e = 2 \quad (7.49)$$

$$n_p = g_p \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T}; \quad g_p = 2 \quad (7.50)$$

$$n_H = g_H \left(\frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T}; \quad g_H = 4 \quad (7.51)$$

1. Температура рекомбинации определяется условием:

$$\boxed{n_p(T) = n_H(T)} \quad (7.52)$$

Это одно уравнение, но неизвестных 4:

T, μ_e, μ_p, μ_H

Нужно еще 3 уравнения.

2. Сохранение n_B :

$$n_p + n_H = n_B = \eta_B n_\gamma(T) \quad (7.53)$$

$$\eta_B \approx 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (7.54)$$

$$n_\gamma(T) = 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \Rightarrow \quad (7.55)$$

$$n_p + n_H = 6.1 \cdot 10^{-10} \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (7.56)$$

3. Химическое равновесие:

$$\mu_p + \mu_e = \mu_H \quad [p + e \leftrightarrow H + \gamma] \quad (7.57)$$

4. Электронейтральность (сохранение заряда)

$$n_p = n_e \quad (7.58)$$

Решение

$$n_p n_e = g_p g_e \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p + \mu_e - m_p - m_e)/T} \quad (7.59)$$

$$m_p + m_e = m_H + \Delta_H, \quad \Delta_H = 13.6 \text{ эВ} \quad (7.60)$$

(7.58), (7.57) \Rightarrow

$$n_p^2 = g_p g_e \left(\frac{m_p T}{2\pi} \right)^{3/2} \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T} e^{-\Delta_H/T} \quad (7.61)$$

Из (7.51):

$$e^{(\mu_H - m_H)/T} = \frac{n_H}{g_H \left(\frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2}} \Rightarrow \quad (7.62)$$

$$n_p^2 = \left(\frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} n_H e^{-\Delta_H/T} \quad (7.63)$$

К форме Саха:

$$X_p = \frac{n_p}{n_B}, \quad X_H = \frac{n_H}{n_B}, \quad X_p + X_H = 1 \quad (7.64)$$

Из (7.63)

$$X_p^2 \left(\frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = X_H \frac{1}{n_B} \Rightarrow \quad (7.65)$$

$$X_p + n_B X_p^2 \left(\frac{2\pi}{m_e T} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (7.66)$$

$$n_B = \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 \quad (7.67)$$

$$X_p + \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} X_p^2 \eta_B \left(\frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (7.68)$$

Малый множитель:

$$\eta_B \left(\frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} \sim 10^{-17} \Rightarrow \quad (7.69)$$

сразу видно, что $T_r \ll \Delta_H$.

$X_p = 0.5 \Rightarrow$

$$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} \eta_B \left(\frac{2\pi T}{m_e} \right)^{3/2} e^{\Delta_H/T} = 1 \quad (7.70)$$

Уравнение привести к виду $x = \ln(Ax^\alpha)$:

$$\frac{\Delta_H}{T} = \ln \left[\frac{\sqrt{\pi}}{\zeta(3)\eta_B 2\sqrt{2}} \left(\frac{m_e}{\Delta_H} \right)^{3/2} \left(\frac{\Delta_H}{T} \right)^{3/2} \right] \quad (7.71)$$

В логарифмическом порядке (первая итерация):

$$T_{rec}^{(1)} = 0.37 \text{ эВ} \quad (7.72)$$

Точное решение

$$\boxed{T_{rec} = 0.321 \text{ эВ}} \quad (7.73)$$

Учтены электроны и барионы, уже связанные в гелии:

$$\eta_B = 0.75 \times 6.1 \cdot 10^{-10} \quad (7.74)$$

Красное смещение:

$$T(t) = T_0 \frac{a_0}{a(t)} = T_0(z + 1) \Rightarrow \quad (7.75)$$

$$z_{rec} = \frac{T}{T_0} - 1 \approx 1370 \quad (7.76)$$

Красное смещение РД-ДМ перехода

$$z \approx 3 \cdot 10^3 \Rightarrow \quad (7.77)$$

Рекомбинация происходит на ДМ- (пылевидной) стадии.

$$t = \frac{2}{3H} \quad (7.78)$$

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho \quad (\text{общее уравнение Фридмана}) \quad (7.79)$$

$$t_{rec} = \sqrt{\frac{1}{6\pi G \rho_M(t_{rec})}} = \sqrt{\frac{M_{Pl}^2}{6\pi \rho_M(T_{rec})}} \quad (7.80)$$

т.к. материя доминирует.

$$\begin{aligned} \rho_M = \rho_B + \rho_{CDM} &= \frac{\rho_B + \rho_{CDM}}{\rho_c} \frac{\rho_c}{\rho_B} \cdot \rho_B = \\ &= \frac{\Omega_M}{\Omega_B} \rho_B = \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p n_B(T_{rec}) = \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p \eta_B n_\gamma(T_{rec}) = \\ &= \frac{\Omega_M}{\Omega_B} m_p \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_{rec}^3 \Rightarrow \quad (7.81) \end{aligned}$$

$$\boxed{t_{rec} = \sqrt{\frac{\pi}{12\zeta(3)} \frac{\Omega_B}{\Omega_M} \frac{M_{Pl}^2}{\eta_B m_p T_{rec}^3}} \approx 350 \text{ тыс. лет}} \quad (7.82)$$

Каковы были химические потенциалы μ_p, μ_H, μ_e на момент рекомбинации?

$$\begin{cases} g_p \left(\frac{m_p T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T_{rec}} = g_H \left(\frac{m_H T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T_{rec}} \\ g_p \left(\frac{m_p T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_p - m_p)/T_{rec}} = g_e \left(\frac{m_e T_{rec}}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_e - m_e)/T_{rec}} \\ \mu_p + \mu_e = \mu_H \end{cases} \quad (7.83)$$

Решение ★:

$$\mu_p = m_p - \Delta_H + T \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_e}{m_H} \right)^{3/2} \right] \quad (7.84)$$

$$\mu_e = m_e - \Delta_H + T \ln \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m_p}{m_H} \right)^{3/2} \right] \quad (7.85)$$

$$\mu_H = m_H - \Delta_H + T \ln \left[\frac{1}{4} \left(\frac{m_e}{m_p} \right)^{3/2} \right] \quad (7.86)$$

Во всех случаях

$$\mu_i = m_i - \delta\mu_i; \quad \delta\mu_i \ll m_i \quad (7.87)$$

Каков хим. потенциал атомов водорода сейчас?

$$\begin{aligned} n_H &\approx \eta_B n_\gamma = \eta_B \cdot 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_0^3 = \\ &= g_H \left(\frac{m_H T_0}{2\pi} \right)^{3/2} e^{(\mu_H - m_H)/T_0} \end{aligned} \quad (7.88)$$

$$e^{(\mu_H - m_H)/T_0} = \frac{1}{2} \eta_B \frac{\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T_0}{m_H} \right)^{3/2} \Rightarrow \quad (7.89)$$

$$\begin{aligned} \mu_H &= m_H + T_0 \ln \left[\frac{1}{2} \eta_B \frac{\zeta(3)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2T_0}{m_H} \right)^{3/2} \right] = \\ &= m_H - \delta\mu_H^0; \quad \delta\mu_H^0 = 1.5 \cdot 10^{-11} \text{ ГэВ} \end{aligned} \quad (7.90)$$

Длительность рекомбинации

Диапазон температур, когда $\exp(\Delta_H/T)$ отличается от $\exp(\Delta_H/T_{rec})$ в e раз:

$$\left| \frac{\Delta_H}{T \pm \Delta T} - \frac{\Delta_H}{T_r} \right| = 1 \Rightarrow \frac{\Delta T}{T_{rec}} \approx \frac{T_{rec}}{\Delta_H} = \frac{0.32}{13.6} \approx 0.02 \quad (7.91)$$

$$T = \frac{\text{const}}{a} \Rightarrow \frac{\Delta a}{a_{rec}} = \frac{\Delta T}{T_{rec}} = 0.02 \ll 1 \quad (7.92)$$

Время рекомбинации много меньше хаббловского времени.