

Лекция 4

Зоопарк космологических моделей. Кривая блеск - красное смещение для сверхновых Ia. Λ CDM-модель. Эра излучения, эра вещества, эра ДеСиттера.

Ультрарелятивистское вещество, плоская вселенная

$$p = \frac{1}{3}n\langle \mathbf{v}\mathbf{p} \rangle - \text{для любого газа} \quad (3.87)$$

Ультрарелятивистский (УР) газ:

$$E^2 = m^2 + p^2 \approx p^2 \Rightarrow p \cong E, \quad v \cong 1 \Rightarrow \quad (3.88)$$

$$p = \frac{1}{3}nE = \frac{1}{3}\rho \quad (3.89)$$

$$\boxed{p = \frac{1}{3}\rho} \quad (3.90)$$

Как ρ зависит от a ?

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (\text{сохр. ТЭИ}) \quad (3.91)$$

$$\frac{d\rho}{\rho + p} = -3d(\ln a) \quad (3.92)$$

$$\boxed{\rho = \frac{\text{const}}{a^4}} \quad (3.93)$$

(не $1/a^3$!)

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho = \frac{\text{const}}{a^4} \quad (3.94)$$

$$\boxed{a(t) = \text{const}'t^{1/2}} \quad (3.95)$$

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} \quad (3.96)$$

(для пыли было $\frac{2}{3t}$)

$$\rho = \frac{3}{8\pi G} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^2} \quad (3.97)$$

Горизонт:

$$l_H(t) = a(t) \int_0^t \frac{dt}{a(t)} = 2t = \frac{1}{H(t)} \quad (3.98)$$

(для пыли $2/H(t)$)

Вакуум и де-Ситтеровское решение

Никакой материи кроме Λ -члена.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\Lambda, \quad \Lambda = \text{const} \geq 0 \quad (3.99)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = (\pm) \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\Lambda} = (\pm)H_{dS} \Rightarrow \quad (3.100)$$

$$a(t) = \text{const} \times e^{H_{dS}t} \quad (3.101)$$

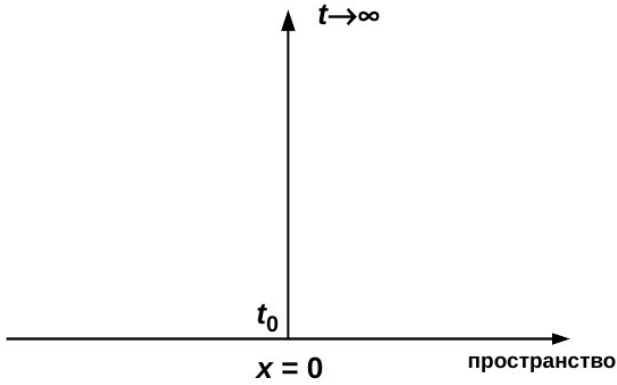
Сингулярности нет. Космологический горизонт = $+\infty$ (тоже нет).

Из сохранения ТЭИ:

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) \Rightarrow \dot{\rho} = 0 \quad (3.102)$$

Плотность постоянна (что и ожидается от вакуума).

ДеСиттеровский горизонт



$$\eta(t \rightarrow \infty) = \int_t^\infty \frac{dt}{a(t)} = \int_t^\infty \frac{dt}{\exp(H_{dS}t)} = \frac{e^{-H_{dS}t}}{\text{const} \cdot H_{dS}} \quad (4.17)$$

Физический горизонт:

$$l_{dS} = a(t)\eta(t)|_\infty = \frac{1}{H_{dS}} \quad (4.18)$$

Наблюдатель никогда не узнает о событиях дальше l_{dS} . Для ИР пыли и УР газа такого горизонта нет.

Случай $\varkappa = +1, -1$

Пылевидная материя, $\Lambda = 0$

$$\rho = \frac{\text{const}}{a^3} \quad (4.19)$$

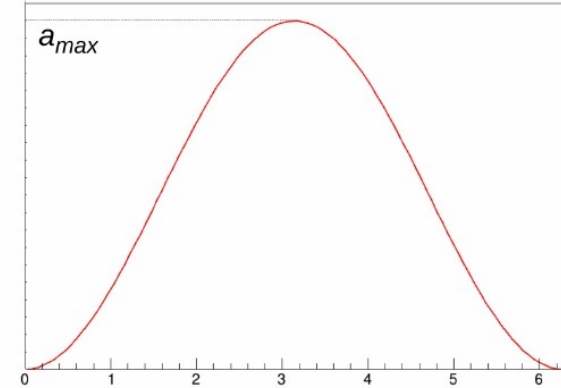
$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\text{const}}{a^3} - \frac{\varkappa}{a^2} = \frac{a_{max}}{a^3} - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (4.20)$$

$$dt = a(t)d\eta \Rightarrow \left(\frac{da}{d\eta}\right)^2 = a_{max}a - \varkappa a^2 \quad (4.21)$$

$\varkappa = +1$

$$a(\eta) = a_{max} \sin^2 \frac{\eta}{2} \quad (4.22)$$

Вселенная рождается в точке и коллапсирует в точку.



$$t = \int_0^\eta a(\eta)d\eta = \frac{a_{max}}{2}(\eta - \sin \eta) \quad (4.23)$$

Для $\varkappa = +1$ можно явно выразить a_{max} через массу вселенной:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G \text{ const}}{3} \frac{\varkappa}{a^3} - \frac{\varkappa}{a^2} = \frac{a_{max}}{a^3} - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (4.24)$$

$$\frac{8\pi G}{3} \rho = \frac{a_{max}}{a^3} \quad (4.25)$$

$$\rho \times 2\pi^2 a^3 = m \Rightarrow \rho = \frac{m}{2\pi^2 a^3} \quad (4.26)$$

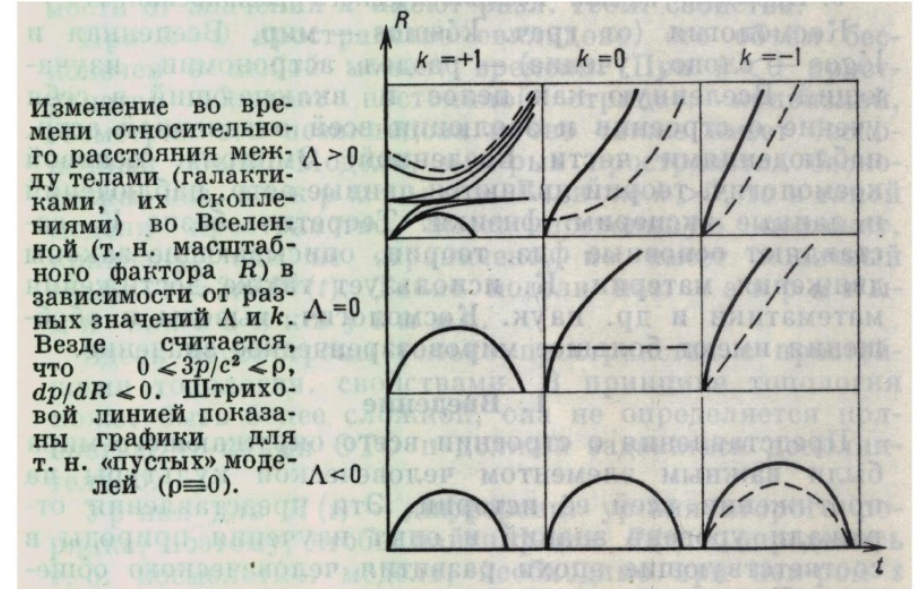
$$\frac{8\pi G}{3} \frac{m}{2\pi^2 a^3} = \frac{a_{max}}{a^3} \Rightarrow a_{max} = \frac{4}{3\pi} mG \quad (4.27)$$

$\varkappa = -1$

$$a(\eta) = a_{max} \text{sh}^2 \frac{\eta}{2} \quad (4.28)$$

$$t = \int_0^\eta a(\eta) d\eta = \frac{a_{max}}{2} (\text{sh} \eta - \eta) \quad (4.29)$$

Зоопарк космологических моделей



И.Д. Новиков. Космологические модели. Физическая энциклопедия, Т.2, стр. 475

Параметр замедления

$$q_0 = -\frac{1}{H_0^2} \frac{\ddot{a}}{a} \Big|_{t_0} = -\frac{\ddot{a} a}{\dot{a}^2} \quad (4.30)$$

Пыль:

$$a(t) = \text{const } t^{2/3}$$

$$\dot{a}(t) = \frac{2}{3} \text{const } t^{-1/3} \quad (4.31)$$

$$\ddot{a}(t) = -\frac{2}{9} \text{const } t^{-4/3}$$

$$q_0 = +\frac{1}{2} \quad (4.32)$$

Каков параметр замедления в более общем случае?
(И в чем заключается этот более общий случай)?

Критическая плотность

Уравнение Фридмана:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G(\rho + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a^2} \quad (4.33)$$

⇒ Постоянная Хаббла сейчас:

$$H_0^2 = \frac{8\pi}{3} G(\rho_0 + \Lambda) - \frac{\varkappa}{a_0^2} \quad (4.34)$$

Если пространство плоское, $\varkappa = 0$, то

$$\frac{8\pi}{3} G(\rho_0 + \Lambda) = H_0^2 \Rightarrow \rho_0 + \Lambda = \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \quad (4.35)$$

$$\rho_c \equiv \frac{3}{8\pi G} H_0^2 \quad \text{— критическая плотность} \quad (4.36)$$

$$h = 0.68 \Rightarrow$$

$$\rho_c = 4.9 \cdot 10^{-6} \frac{\Gamma_{\text{ЭВ}}}{\text{см}^3} \quad (4.37)$$

$\rho_0 + \Lambda$ измеряются (см. след. лекции).
Результат: в пределах ошибок

$$\rho_0 + \Lambda = \rho_c \Rightarrow \quad (4.38)$$

Наше пространство очень близко к плоскому.

Из (4.33):

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \left(\rho_M + \rho_{rad} + \rho_\Lambda - \frac{3}{8\pi G} \frac{\varkappa}{a^2} \right) =$$

$$= \frac{8\pi}{3} (\rho_M + \rho_{rad} + \rho_\Lambda + \rho_{curv}) \quad (4.39)$$

В современную эпоху (по определению)

$$\rho_M^0 + \rho_{rad}^0 + \rho_\Lambda^0 + \rho_{curv}^0 = \rho_c \quad (4.40)$$

Введем относительные плотности:

$$\Omega_M = \rho_M / \rho_c \quad (4.41)$$

$$\Omega_{rad} = \rho_{rad} / \rho_c \quad (4.42)$$

$$\Omega_\Lambda = \rho_\Lambda / \rho_c \quad (4.43)$$

$$\Omega_{curv} = \rho_{curv} / \rho_c \quad (4.44)$$

$$\Omega_M^0 + \Omega_{rad}^0 + \Omega_\Lambda^0 + \Omega_{curv}^0 = 1 \quad (4.45)$$

Уравнение Фридмана в относительных плотностях:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right] \quad (4.46)$$

Считая $\Omega_{rad} \ll \Omega_M$ найдем q_0 в современную эпоху

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right] \quad (4.47)$$

$$\dot{a} = H_0 \sqrt{\Omega_M a_0^3/a + \Omega_\Lambda a^2 + \Omega_{curv} a_0^2} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \ddot{a} &= \frac{H_0}{2} \frac{-\Omega_M a_0^3/a^2 + 2a \Omega_\Lambda}{\sqrt{\Omega_M a_0^3/a + \Omega_\Lambda a^2 + \Omega_{curv} a_0^2}} \dot{a} = \\ &= \frac{1}{2} H_0^2 (2a \Omega_\Lambda - \frac{1}{a^2} \Omega_M a_0^3) \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$q_0 = -\frac{1}{H_0^2} \frac{\ddot{a}}{a} \Big|_{t_0} = \frac{1}{2} (\Omega_M - 2\Omega_\Lambda) \quad (4.50)$$

$$q_0 = \frac{1}{2} (\Omega_M - 2\Omega_\Lambda) \quad [\Omega_M = 1 \Rightarrow q_0 = 1/2] \quad (4.51)$$

В каком соотношении находятся Ω_M и Ω_Λ ?

Стандартные свечи и параметр замедления

Наблюдаемая яркость $J(z)$ стандартного источника со светимостью L :

$$J(z) = \frac{L}{S(z)} \times \frac{1}{1+z} \times \frac{1}{1+z} \quad (4.52)$$

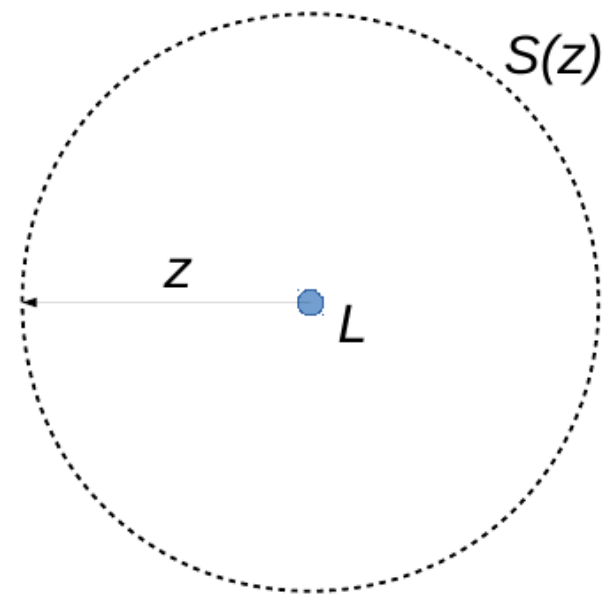
покра- растяжение
нение времени

$S(z)$ – площадь 2-сферы, окружающей источник.

Растяжение времени:

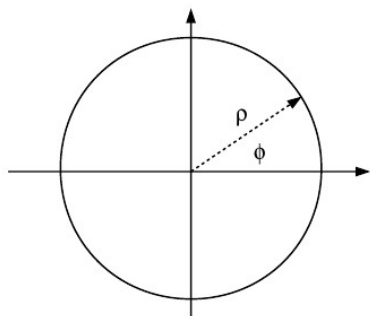
$$d\eta_i = \frac{dt_i}{a_i} = \frac{dt_0}{a_0} \Rightarrow dt_0 = \frac{a_0}{a_i} dt_i = (1+z) dt_i \quad (4.53)$$

$$S(z) = ?$$



Площадь 2-сферы в 3-плоском пространстве, 3-сфере и 3-псевдосфере

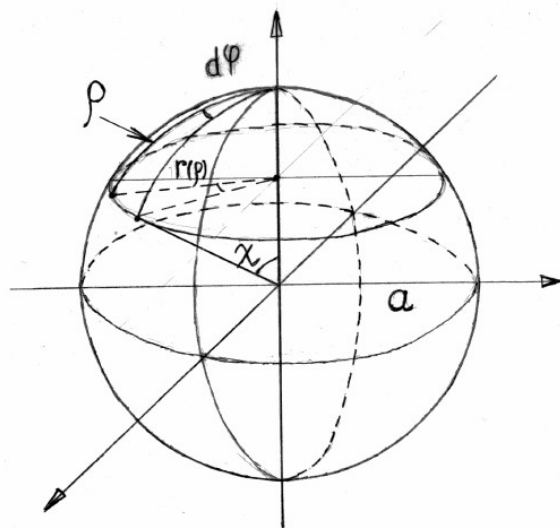
1. Длина окружности на 2-плоскости



$$C_\rho = 2\pi r(\rho) \quad (4.54)$$

$$r(\rho) = a \left(\frac{\rho}{a} \right) = a\chi(\rho) \quad (4.55)$$

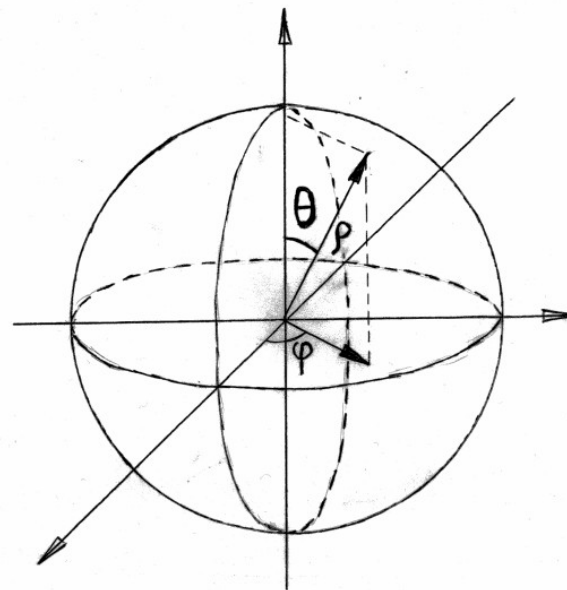
2. Длина окружности на 2-сфере



$$C_\rho = 2\pi r(\rho) \quad (4.56)$$

$$r(\rho) = a \sin \left(\frac{\rho}{a} \right) = a \sin \chi(\rho) \quad (4.57)$$

3. Площадь 2-сферы в 3-плоскости



$$S_\rho = 4\pi r^2(\rho) \quad (4.58)$$

$$r(\rho) = a \left(\frac{\rho}{a} \right) = a\chi(\rho) = a\chi(\rho(z)) \quad (4.59)$$

4. Площадь 2-сферы в 3-сфере

$$S_\rho = 4\pi r^2(\rho) \quad (4.60)$$

$$r(\rho) = a \sin \left(\frac{\rho}{a} \right) = a \sin \chi(\rho) = a \sin \chi(\rho(z)) \quad (4.61)$$

5. Площадь 2-сферы в 3-псевдосфере

$$S_\rho = 4\pi r^2(\rho) \quad (4.62)$$

$$r(\rho) = a \operatorname{sh} \left(\frac{\rho}{a} \right) = a \operatorname{sh} \chi(\rho) = a \operatorname{sh} \chi(\rho(z)) \quad (4.63)$$

$$S(z) = 4\pi r^2(z) \quad (4.64)$$

$$r(z) = \begin{cases} a \chi(z) & - 3\text{-плоскость} \\ a \sin \chi(z) & - 3\text{-сфера} \\ a \operatorname{sh} \chi(z) & - 3\text{-псевдосфера} \end{cases} \quad (4.65)$$

$$\chi(z) = \frac{\rho(z)}{a} \quad (4.66)$$

Вычисление $r(z)$

В конформных координатах, в общем случае:

$$ds^2 = dt^2 - a^2 dx^2 = a^2(d\eta^2 - dx^2) \quad (4.67)$$

Свет:

$$ds = 0 \Rightarrow d\eta = dx \quad (4.68)$$

При распространении света из центра сферической с.к. углы не меняются:

$$d\Theta = d\varphi = 0 \Rightarrow dx = d\rho/a = d\chi \Rightarrow \quad (4.69)$$

$$x = \chi = \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}; \quad \chi(z) = ? \quad (4.70)$$

$$z(t) = \frac{a_0}{a(t)} - 1 \Rightarrow dz = -\frac{a_0}{a^2} \dot{a} dt \Rightarrow dt = -\frac{a^2}{a_0 \dot{a}} dz \Rightarrow \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \chi(z) &= \int_z^0 \left(-\frac{a^2}{a_0 \dot{a}} \right) dz \frac{1}{a} = \int_0^z \frac{dz}{a_0 (\dot{a}/a)} = \\ &\sqrt{\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} \left(\frac{a_0}{a} \right)^2 \right]}; \\ &\frac{a_0}{a} = z + 1 \quad \backslash = \\ &= \int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} (1+z)^2}} \quad (4.72) \end{aligned}$$

Результат:

$\varkappa = 0$:

$$r(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}; \quad \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \quad (4.73)$$

$\varkappa = +1$:

$$r(z) = a_0 \sin \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} (1+z)^2}} \right] \quad (4.74)$$

$\varkappa = -1$:

$$r(z) = a_0 \operatorname{sh} \left[\int_0^z \frac{dz}{a_0 H_0 \sqrt{\Omega_M (1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} (1+z)^2}} \right] \quad (4.75)$$

Можно из П.Ч. исключить H_0 :

$$\Omega_{curv} = \frac{\rho_{curv}^0}{\rho_c} = \frac{1}{\rho_c} \left(-\frac{\varkappa}{a_0^2} \right) \frac{3}{8\pi G} = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \left(-\frac{\varkappa}{a_0^2} \right) \frac{3}{8\pi G} = -\frac{1}{H_0^2} \frac{\varkappa}{a_0^2} \quad (4.76)$$

$H_0 r(z)$ – выражение $r(z)$ в естественных космологических единицах:

$\varkappa = 0$:

$$H_0 r(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda}}; \quad \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \quad (4.77)$$

$\varkappa = +1$:

$$H_0 r(z) = \frac{1}{\sqrt{-\Omega_{curv}}} \sin \left[\int_0^z \frac{\sqrt{-\Omega_{curv}} dz}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(1+z)^2}} \right] \quad (4.78)$$

$\varkappa = -1$:

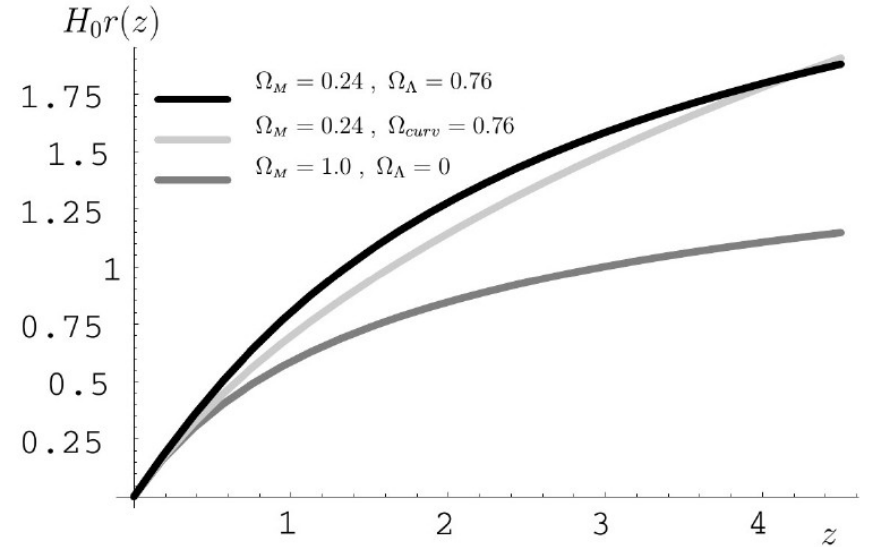
$$H_0 r(z) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{curv}}} \text{sh} \left[\int_0^z \frac{\sqrt{\Omega_{curv}} dz}{\sqrt{\Omega_M(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv}(1+z)^2}} \right] \quad (4.79)$$

Наблюдаемая яркость

$$J(z) = \frac{L}{(z+1)^2 4\pi r^2(z)} \Rightarrow \quad (4.80)$$

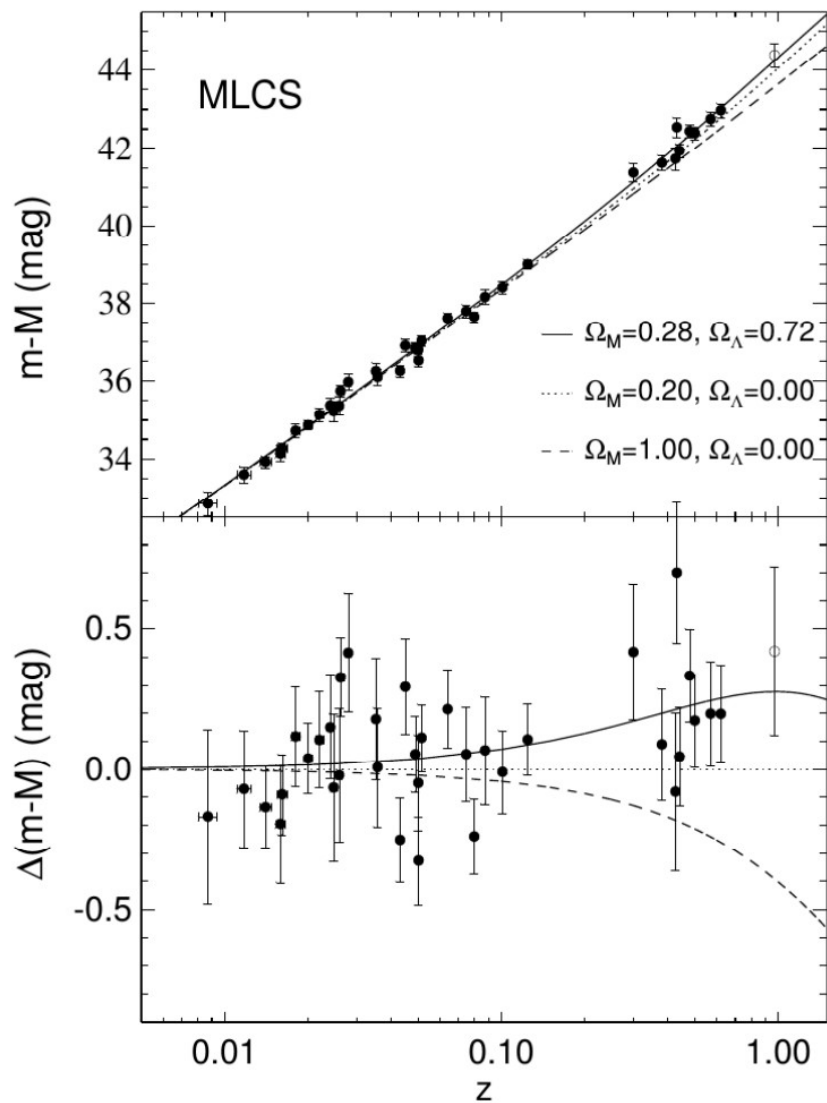
$$H_0 r(z; \Omega_M, \Omega_\Lambda, \Omega_{curv}) = \frac{H_0}{z+1} \sqrt{\frac{L}{4\pi J(z)}} \quad (4.81)$$

Если есть «стандартная свеча» L , то $H_0 r(z)$ можно измерить.



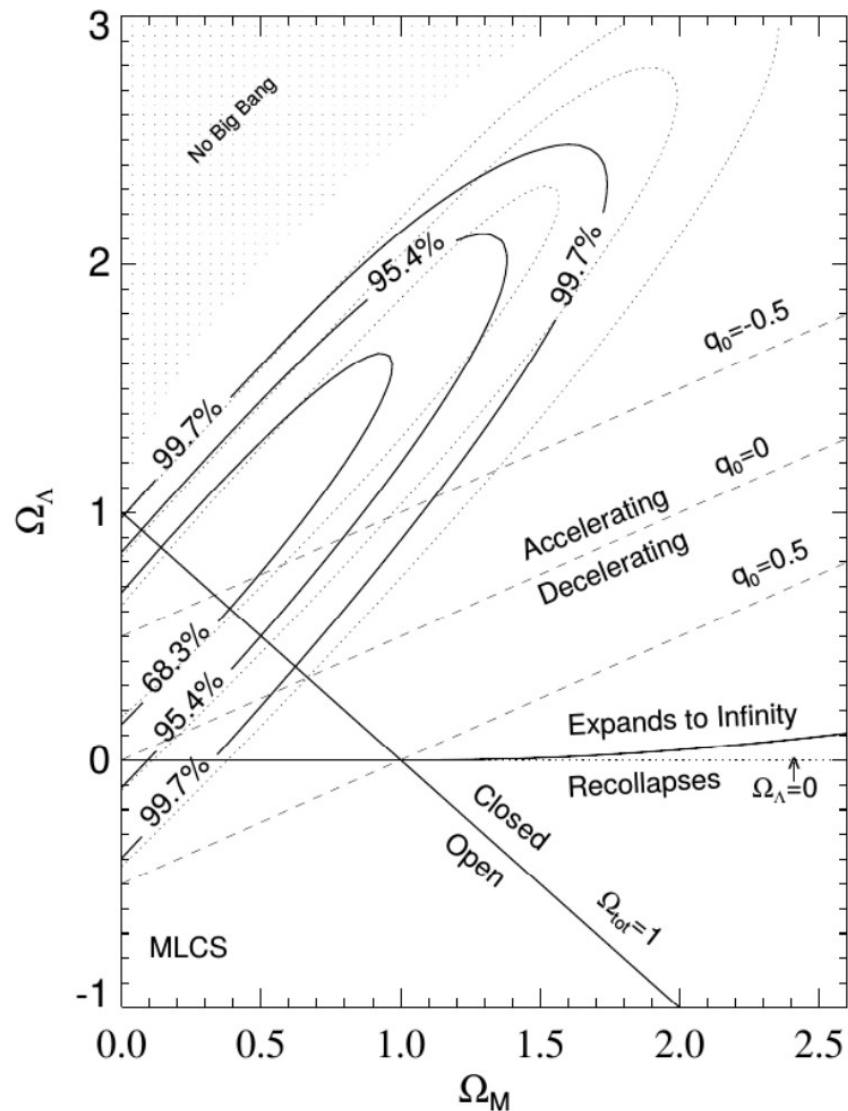
В плоской вселенной при больших Λ при одном и том же z расстояние $r(z)$ больше – сверхновые тусклее.

Стандартные свечи – сверхновые типа Ia.



A.G. Riess et. al. The Astronomical Journal, 116 : 1009-1038, 1998.

$M - m$ – светимость (чем больше, тем тусклее)
 Эксперимент не согласуется с предположением, что Вселенная заполнена только материей.



A.G. Riess et. al. The Astronomical Journal, 116 : 1009-1038, 1998.

Ограничения на Ω_M и Ω_Λ по одним только сверхновым Ia.

Назад к параметру замедления

Во втором порядке по z

$$r(z) \cong \frac{1}{H_0} \left[z - \frac{z^2}{2} \left(1 + \frac{\Omega_M - 2\Omega_\Lambda}{2} \right) \right] \quad (4.82)$$

Из (4.50):

$$q_0 = \frac{\Omega_M - 2\Omega_\Lambda}{2} \Rightarrow \quad (4.83)$$

$$r(z) \cong \frac{1}{H_0} \left[z - \frac{z^2}{2} (1 + q_0) \right] \quad (4.84)$$

q_0 определяется прямо по кривой $r(z)$, $q_0 < -0.5 \Rightarrow$ не замедление, а ускорение!

$$\frac{\Omega_M - 2\Omega_\Lambda}{2} < -0.5 \Rightarrow \Omega_\Lambda > \frac{1}{2}(\Omega_M + 1) \quad (4.85)$$

$$\Omega_M + \Omega_L \cong 1 \Rightarrow \Omega_\Lambda > 2/3 \quad (4.86)$$

Имеется приблизительное вырождение по Ω_M и Ω_Λ при малых z .

Можно ли использовать гамма-барстеры как стандартные свечи при больших z ?

Mon. Not. R. Astron. Soc. 000, [00] (2015) Printed August 21, 2015 (MN \LaTeX style file v2.2)

Arc long gamma-ray bursts standard candles?

Hai-Nan Lin^{1*}, Xin Li^{1,2†}, Sai Wang^{2‡} and Zhe Chang^{3§}

¹Department of Physics, Chongqing University, Chongqing 401331, China

²State Key Laboratory Theoretical Physics, Institute of Theoretical Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China

³Institute of High Energy Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China

Accepted xxx; Received xxx; in original form xxx

ABSTRACT

Gamma-ray bursts (GRBs) are widely proposed as an effective probe to trace the Hubble diagram of the Universe in high redshift range. However, the calibration of GRBs is not as easy as that of type-Ia supernovae (SNe Ia). Most calibrating methods at present make use one or some of the empirical luminosity correlations, e.g., Amati relation. One of the underlying assumptions of these calibrating methods is that the empirical correlation is universal over all redshifts. In this paper, we check to what extent this assumption holds. Assuming that SNe Ia exactly trace the Hubble diagram of the Universe, we re-investigate the Amati relation for low redshift ($z < 1.4$) and high redshift ($z > 1.4$) GRBs, respectively. It is found that the Amati relation of low- z GRBs differs from that of high- z GRBs at more than 3σ confidence level. This result is insensitive to cosmological models. We should be cautious when using Amati relation to reconstruct the Hubble diagram of the Universe.

Key words: cosmological parameters – gamma-ray burst: general – supernovae: general

1 INTRODUCTION

Gamma ray bursts (GRBs) are the most luminous explosions in the Universe since the big bang. The isotropic equivalent energy they released in a few seconds can be as large as $10^{48} \sim 10^{55}$ ergs. For recent reviews, see, e.g., Pirin (1999); Mészáros (2002, 2006); Kumar & Zhang (2015). Thanks to their extreme brightness, GRBs are detectable up to redshift $z \gtrsim 9$ (Salvaterra 2015). For example, the most distant GRB known today is GRB 090429B, whose redshift is as high as $z \approx 9.4$ (Cucchiara et al. 2011). Due to their high redshift properties, GRBs are often proposed as potential candles to trace the Hubble diagram of the Universe in the high redshift range. In fact, GRBs have already been widely used, together with other candles, such as type-Ia supernovae (SNe Ia), to constrain the cosmological parameters (Schaefer 2003; Bloom, Frail & Kulkarni 2003; Xu, Dai & Liang 2005; Firmani et al. 2005; Liang & Zhang 2005; Firmani et al. 2006a; Schaefer 2007; Liang et al. 2008; Liang & Zhang 2008; Wei & Zhang 2009; Wei 2010; Wang, Qi & Dai 2011; Capozziello et al. 2012; Wei, Wu & Melia 2013; Velten, Montiel & Carneiro 2013; Cai et al. 2013; Bretón & Montiel 2013; Chang et al. 2014; Cano & Jakobsson 2014; Cuzinatto, Medeiros & de Moraes 2014; Wang & Wang 2014; Wang, Dai & Liang 2013; Li, Ding & Zhu 2013). The consistent luminosities of SNe Ia make them the ideal distance indicators in tracing the Hubble diagram of the local (low-redshift) universe. However, since we have little knowledge about the explosion mechanism of GRBs, the GRB candle is much less standard than the SN Ia candle.

Nevertheless, one can still calibrate GRBs using the empirical luminosity correlations found in long GRBs. These correlations include Amati relation ($E_{\text{peak}} - E_{\text{iso}}$) (Amati et al. 2002; Amati 2003, 2006), Ghirlanda relation ($E_{\text{peak}} - E_\gamma$) (Ghirlanda, Ghisellini & Lazzati 2004), Yonetoku relation ($E_{\text{peak}} - L_{\text{iso}}$) (Yonetoku et al. 2004), Liang-Zhang relation ($t_s - E_{\text{peak}} - E_{\text{iso}}$) (Liang & Zhang 2005), Firmani relation ($T_{0.45} - E_{\text{peak}} - L_{\text{iso}}$) (Firmani et al. 2006b), lag-luminosity relation

* e-mail: linhn@hep.ac.cn.
† e-mail: lxin1981@cqu.edu.cn.
‡ e-mail: wangsa@itp.ac.cn.
§ e-mail: changz@hep.ac.cn.

Пока есть проблемы.

arXiv:1504.07026v2 [astro-ph.HE] 20 Aug 2015

ΛCDM-модель – стандартная модель космологии

ΛCDM – Λ Cold Dark Matter

(Некоторые) параметры стандартной модели

$$\Omega_M = 0.309 \pm 0.006 \quad (\Omega_B \approx 0.05, \Omega_{CDM} \approx 0.26) \quad (4.87)$$

$$\Omega_\Lambda = 0.691 \pm 0.006 \quad (4.88)$$

$$\Omega_{rad} \lesssim 10^{-4} \quad (4.89)$$

$$|\Omega_{curv}| < 0.005 \quad (4.90)$$

$$h = 0.6780 \pm 0.0077 \quad (4.91)$$

$$w = -1.006 \pm 0.045 \quad (4.92)$$

1. Уравнение состояния темной энергии:

$$p = w\rho \quad (4.93)$$

$w = -1 \Rightarrow$ темная энергия есть в точности вакуумный космологический член. Иначе «квинтэссенция».

2. Оценка Ω_{rad}

$$\Omega_\gamma = \frac{\rho_\gamma}{\rho_c} \quad (4.94)$$

«Закон Стефана-Больцмана»

$$\rho_\gamma = 2 \frac{\pi^2}{30} T_0^4, \quad T_0 = 2.725 \text{ K}^\circ \quad (4.95)$$

$$\rho_c = \frac{3}{8\pi G} H_0^2; \quad h = 0.68 \Rightarrow \quad (4.96)$$

$$\Omega_\gamma = 0.53 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \Omega_{rad} \simeq 10^{-4} \quad (4.97)$$

(Проверьте)

Основные фазы эволюции Вселенной

Уравнение Фридмана:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_\Lambda + \Omega_{curv} \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \right] \quad (4.98)$$

1. При $a \rightarrow 0$ доминирует радиационный член $\Omega_{rad} \Rightarrow$
радиационно-доминированная стадия, эра доминирования ультрарелятивистской материи, «Горячий Большой взрыв»
2. Потом доминирует член $\Omega_M \Rightarrow$
эра доминирования (холодной нерелятивистской) материи, эра пылевидной материи
3. Потом доминирует член $\Omega_\Lambda \Rightarrow$
эра ДеСиттера

В первом приближении есть всего три основные фазы эволюции, связанные соответственно с $\Omega_{rad}, \Omega_M, \Omega_\Lambda$.

От радиационно-доминированной стадии к стадии холодной материи

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \right] \quad (4.99)$$

$$\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \sim \Omega_{rad} \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \Rightarrow a_{eq} \quad (4.100)$$

$$\frac{a_0}{a_{eq}} \sim \frac{\Omega_M}{\Omega_{rad}} \sim \frac{0.3}{10^{-4}} = 1 + z_{eq} \Rightarrow \quad (4.101)$$

$$\boxed{z_{eq} \approx 3 \cdot 10^3} \quad (4.102)$$

(Это верно с точностью до фактора $\approx 1.1 \div 1.2$. Проблема в том, что $T_\gamma \neq T_\nu$)

$$\frac{T_{eq}}{T_0} = 1 + z_{eq} \Rightarrow T_{eq} = T_0(1 + z_{eq}) \approx 10^4 \text{ K} \sim 1 \text{ эВ} \quad (4.103)$$

Как найти время t_{eq} ?

– Не совсем просто, через температуру.

$$[G] = \text{ГэВ}]^{-2} = [M]^{-2} \quad (4.104)$$

$$M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = \frac{1}{\sqrt{G}} \Rightarrow G = \frac{1}{M_{Pl}^2} \quad (4.105)$$

$$M_{Pl} = 1.6 \cdot 10^{19} \text{ ГэВ} = 2.2 \cdot 10^{-5} \text{ г} \quad (4.106)$$

«Закон Стефана-Больцмана» для фотонов и нейтрино (других УР частиц нет):

$$\rho = \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \quad (4.107)$$

g_* – эффективное число степеней свободы (стат. вес) фотонов и нейтрино:

$$g_* = 2 + \frac{21}{4} \left(\frac{4}{11}\right)^{4/3} \approx 3.36 \text{ (получим потом)} \quad (4.108)$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3} G \rho \quad (4.109)$$

$$T = (1 + z) T_0 \quad (4.110)$$

$$\begin{aligned} H_{eq} &= \sqrt{\frac{8\pi}{3} G \rho} = \sqrt{\frac{8\pi}{3} G \frac{\pi^2}{30} g_* T^4} = T^2 \sqrt{\frac{8\pi^3}{90} g_* \frac{1}{M_{Pl}^2}} \\ &= \frac{T^2}{M_{Pl}^*} = \frac{(1 + z_{eq}) T_0}{M_{Pl}^*} \end{aligned} \quad (4.111)$$

$$\boxed{M_{Pl}^* = \frac{M_{Pl}}{\sqrt{\frac{8\pi^3}{90} g_*}}} \quad (4.112)$$

На радиационно-доминированной стадии

$$t_{eq} = \frac{1}{2H_{eq}} = \frac{1}{2} \frac{M_{Pl}^*}{[(1 + z_{eq}) T_0]^2} \approx 85000 \text{ лет} \quad (4.113)$$

От доминирования материи к фазе ДеСиттера – от замедления к ускорению

Ищем точку перегиба $a(t)$:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda \right] \quad (4.114)$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left(\Omega_M \frac{a_0^3}{a} + \Omega_\Lambda a^2 \right) \quad (4.115)$$

$$2a\ddot{a} = \frac{8\pi}{3}G\rho_c \left(-\Omega_M \frac{a_0^3}{a^2} \dot{a} + 2a\dot{a}\Omega_\Lambda \right) \quad (4.116)$$

$$\ddot{a} = 0 \Rightarrow \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 = \frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_M} \quad (4.117)$$

$$z = \frac{a_0}{a} - 1 = \sqrt[3]{\frac{2\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 0.69}{0.31}} - 1 = 0.65 \quad (4.118)$$

$t = ?$

Решение для $\Omega_M, \Omega_\Lambda \neq 0, \Omega_{curv} = \Omega_{rad} = 0$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_M \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_\Lambda \right], \quad \Omega_M + \Omega_\Lambda = 1 \quad (4.119)$$

Проверяется подстановкой:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right) \text{sh} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t \right)^{2/3} \quad (4.120)$$

Возраст Вселенной

$$\frac{a(t_0)}{a_0} = 1 \Rightarrow \quad (4.121)$$

$$\left(\frac{\Omega_M}{\Omega_\Lambda} \right) \text{sh} \left(\frac{3}{2} \sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t_0 \right)^{2/3} = 1 \Rightarrow \quad (4.122)$$

$$t_0 = \frac{2}{3H_0\sqrt{\Omega_\Lambda}} \text{arsh} \left(\sqrt{\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_M}} \right) \quad (4.123)$$

$$\Omega_\Lambda = 0.691, \quad \Omega_M = 0.309, \quad h = 0.678 \Rightarrow \quad (4.124)$$

$$t_0 = 13.81 \cdot 10^9 \text{ лет}$$

Возраст перехода от замедления к ускорению

$$\frac{a_0}{a(t)} = z + 1 \Rightarrow t = 7.61 \cdot 10^9 \text{ лет} \quad (4.125)$$

$$t_0 - t = 6.2 \cdot 10^9 \text{ лет} \quad (4.126)$$