Лекция 2

Основы ОТО. 2.
Уравнения Эйнштейна. Линеаризованные уравнения Эйнштейна и гравитационные волны. Тензор энергии-импульса, антигравитация

Получение уравнений Эйнштейна из вариационного приципа

Сначала одна гравитация – без материи.

Действие должно быть общековариантной величиной.
1. Хотим иметь уравнения второго порядка для $g_{\mu\nu}$.
2. Уравнения должны быть линейными относительно вторых производных.

1. Простейшее действие

$$S_\Lambda = -\Lambda \int d^4x \sqrt{-g} \tag{2.1}$$

$$g_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}; \quad \delta g = ? \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \det(\hat{g} + \delta\hat{g}) &= \det[\hat{g}(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g})] = \\ &= \det\hat{g} \cdot \det(1 + \hat{g}^{-1}\delta\hat{g}) = g(1 + \mathrm{Tr}\,(\hat{g}^{-1}\delta\hat{g})) = \\ &g(1 + g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}) = g + g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \Rightarrow \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\delta g = g \cdot g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \tag{2.4}$$

$$\boxed{\delta S_\Lambda = -\Lambda \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) = -\frac{\Lambda}{2} \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.5}$$

2. Вклад $\sim \int d^4x \sqrt{-g}\, f(R)$

Проблема: R зависит от вторых производных g по x. Получим ли уравнения выше второго порядка?

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi, \varphi', \varphi'', \dots) \tag{2.6}$$

$$\delta S = \int d^4x \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'} + \partial^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi''} - \dots \right) \delta\varphi = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \partial\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi'} + \partial^2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi''} - \dots = 0 \tag{2.8}$$

– начиная с второго члена входят производные высших порядков.

Но если φ'' входят в $\mathcal{L}$ в комбинации $\varphi\varphi''$, то:

$$\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial\varphi} = \varphi''; \ \partial\left(\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial\varphi'}\right) = 0; \ \partial^2\left(\frac{\partial(\varphi\varphi'')}{\partial\varphi''}\right) = \varphi'' \tag{2.9}$$

производных выше 2-го порядка не получается.
R зависит от $g''_{\mu\nu}$ именно так.

$$S_R = -K \int d^4x \sqrt{-g} R = -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{2.10}$$

$$\delta S_R = \begin{array}{l|l} -K \int d^4x \delta(\sqrt{-g}) R & = \delta S_1 \\ -K \int d^4x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} & = \delta S_2 \\ -K \int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} & = \delta S_3 \end{array} \tag{2.11}$$

$$\boxed{\delta S_1 = -\frac{K}{2} \int d^4x \sqrt{-g}\, R\, g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}} \tag{2.12}$$

$$\delta S_2 = -K\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \qquad (2.13)$$

$\delta g^{\mu\nu} = ?$

$$\delta(g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}) = 0 \;\Rightarrow\; g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} = -g_{\nu\lambda}\delta g^{\mu\nu} \;|g^{\rho\lambda} \qquad (2.14)$$

$$\delta^\rho_\nu \delta g^{\mu\nu} = -g^{\rho\lambda}g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda} \Rightarrow \qquad (2.15)$$

$$\delta g^{\mu\rho} = -g^{\rho\lambda}\delta_{\nu\lambda}g^{\mu\nu} \;|\; \rho \rightleftarrows \nu \qquad (2.16)$$

$$\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho}\delta g_{\rho\lambda}g^{\lambda\nu} \qquad (2.17)$$

$$\delta S_2 = +K\int d^4x\sqrt{-g}R_{\mu\nu}g^{\mu\rho}g^{\lambda\nu}\delta g_{\rho\lambda} = \\ +K\int d^4x\sqrt{-g}R^{\rho\lambda}\delta g_{\rho\lambda} \qquad (2.18)$$

$$\boxed{\delta S_2 = +K\int d^4x\sqrt{-g}\,R^{\mu\nu}\,\delta g_{\mu\nu}} \qquad (2.19)$$

$$\delta S_3 = -K\int d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \qquad (2.20)$$

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \qquad (2.21)$$

$$\delta R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} + \\ + \delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \delta\Gamma^\mu_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \qquad (2.22)$$

$\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ – тензор, в отличие от $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$! (Почему?)

$$\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}) - \nabla_\rho(\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}) = \\ = \partial_\lambda(\delta\Gamma^\mu_{\nu\rho}) + \Gamma^\mu_{\lambda\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma_{\lambda\nu}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\rho} - \cancel{\Gamma^\sigma_{\lambda\rho}\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma}} - \\ - \partial_\rho(\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda}) - \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\delta\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} + \Gamma^\sigma_{\rho\nu}\delta\Gamma^\mu_{\sigma\lambda} + \cancel{\Gamma^\sigma_{\rho\lambda}\delta\Gamma^\mu_{\nu\sigma}} = \\ = \delta R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} \Rightarrow \qquad (2.23)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda}) \qquad (2.24)$$

$$\delta S_3 = -K\int d^4x\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}[\nabla_\lambda(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] = \\ = -K\int d^4x\sqrt{-g}[\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu}) - \nabla_\nu(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})] = \\ = -K\int d^4x\sqrt{-g}\nabla_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}) = \\ = \left\backslash\; \nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}A^\mu) \;\right\backslash = \\ = -K\int d^4x\,\partial_\lambda(g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - g^{\mu\lambda}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\sigma}) = 0 \qquad (2.25)$$

– так как под интегралом полная дивергенция.

$$\boxed{\delta S_3 = 0} \qquad (2.26)$$

$$\delta S = \delta S_\Lambda + \delta S_R =$$
$$= -\frac{\Lambda}{2} \int d^4x \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$
$$- \frac{K}{2} \int d^4x \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} R \delta g_{\mu\nu}$$
$$+ K \int d^4x \sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} =$$
$$= \int d^4x \sqrt{-g} \left[K \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) - \frac{\Lambda}{2} g^{\mu\nu} \right] \delta g_{\mu\nu} = 0 \tag{2.27}$$

$$\boxed{R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R = \frac{1}{2K} \Lambda g^{\mu\nu}} \tag{2.28}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{1}{2K} \Lambda g_{\mu\nu}} \tag{2.29}$$

K пока неизвестна!

Поля материи, тензор энергии-импульса

$$S = S_\Lambda + S_R + S_m \tag{2.30}$$
$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g}\, \mathcal{L}_m \tag{2.31}$$
$$\delta S_m = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g}\, T_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \tag{2.32}$$

$T_{\mu\nu}$ – метрический тензор энергии-импульса.

Пример. Скалярное поле

$$\mathcal{L}_{sc} = \frac{1}{2} \partial^\nu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\phi) = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\phi) \tag{2.33}$$

$$\delta S_{sc} = \int d^4x \left[\delta \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi) \right) + \right.$$
$$\left. + \sqrt{-g}\, \frac{1}{2}\, \delta g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right] =$$
$$= \int d^4x \left[\frac{1}{2} \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi - V(\varphi) \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} \sqrt{-g}\, g^{\mu\rho} \delta g_{\rho\sigma} g^{\sigma\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi \right] =$$
$$= \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-g} \times$$
$$\left[g^{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}\, g^{\sigma\rho} \partial_\sigma \varphi \partial_\rho \varphi - V(\varphi) \right) - g^{\rho\mu} g^{\nu\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi \right] \delta g_{\mu\nu} \tag{2.34}$$

(2.32)$\Rightarrow$

$$T^{\mu\nu} = g^{\rho\mu} g^{\nu\sigma} \partial_\rho \varphi \partial_\sigma \varphi - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_{sc}(\varphi) \mid g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \tag{2.35}$$
$$T_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi \partial_\beta \varphi - g_{\alpha\beta} \mathcal{L}(\varphi) \tag{2.36}$$

– обычное выражение тензора энергии-импульса скалярного поля, следующее из теоремы Нетер.

Уравнения гравитационного поля с учетом материи

$$\delta S = \delta S_\Lambda + \delta S_R + \delta S_m =$$
$$= \int d^4x\sqrt{-g}\left[K\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) - \frac{\Lambda}{2}g^{\mu\nu} - \frac{1}{2}T^{\mu\nu}\right]\delta g^{\mu\nu} \tag{2.37}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \tag{2.38}$$

Найдем константу $\frac{1}{2K}$

Статический нерелятивистский предел движения частицы:

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{2.39}$$

$$\frac{dx^0}{ds} \approx 1,\ \frac{dx^i}{ds} \ll \frac{dx^0}{ds} \ \Rightarrow\ \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{00} = 0 \tag{2.40}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \tag{2.41}$$

$$\Gamma^i_{00} = \frac{1}{2}\eta^{i\sigma}(\cancelto{0}{\partial_0\gamma_{0\sigma}} + \cancelto{0}{\partial_0\gamma_{\sigma 0}} - \partial_\sigma\gamma_{00}) = +\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00} \tag{2.42}$$

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\frac{1}{2}\partial_i\gamma_{00} = -\partial_i\varphi \tag{2.43}$$

φ - грав. потенциал

$$g_{00} = 1 + \gamma_{00} = 1 + 2\varphi \tag{2.44}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{2}\Delta g_{00} \tag{2.45}$$

Уравнение Пуассона для грав. потенциала:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \tag{2.46}$$

Из (2.45):

$$\Delta g_{00} = 8\pi G\rho \tag{2.47}$$

Уравнение Эйнштейна без Λ

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{1}{2K}T_{\mu\nu} \mid g^{\mu\nu} \tag{2.48}$$

$$R - \frac{1}{2}4R = \frac{1}{2K}T, \quad T \equiv g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} \ \Rightarrow \tag{2.49}$$

$$R = -\frac{1}{2K}T \ \Rightarrow \tag{2.50}$$

$$\boxed{R_{\mu\nu} = \frac{1}{2K}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right)} \tag{2.51}$$

Статический нерелятивистский предел:

$$R_{00} = \frac{1}{2K}\left(\rho - \frac{1}{2}\rho\right) = \frac{1}{4K}\rho \tag{2.52}$$

$$R_{\mu\nu} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \partial_\mu\Gamma^\lambda_{\lambda\nu} + \Gamma^\lambda_{\rho\lambda}\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu}\Gamma^\rho_{\nu\lambda} \tag{2.53}$$

$$R_{00} = \partial_\lambda\Gamma^\lambda_{00} - \cancelto{0}{\partial_0\Gamma^\lambda_{\lambda 0}} \ \text{(статично)} \tag{2.54}$$

$$R_{00} = \frac{1}{2}\Delta g_{00} \Rightarrow \Delta g_{00} = 2R_{00} \tag{2.55}$$

$$\Delta g_{00} = \frac{1}{2K}\rho \tag{2.56}$$

Сравнивая с (2.47):

$$\boxed{\frac{1}{2K} = 8\pi G} \tag{2.57}$$

Уравнение Эйнштейна с Λ-членом:

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu})} \tag{2.58}$$

Из уравнения Эйнштейна следует коваринтный закон сохранения импульса:

$$\nabla^\mu \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\nu \tag{2.59}$$

$$\nabla^\mu \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) \equiv 0 \;\Rightarrow\; \nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{2.60}$$

Доказательство.
Тождество Бьянки:

$$\nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\mu R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\mu} = 0 \tag{2.61}$$

Сворачиваем по λ, μ:

$$\nabla_\rho R^\lambda{}_{\sigma\lambda\nu} + \nabla_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} + \nabla_\nu R^\lambda{}_{\sigma\rho\lambda} = 0 \tag{2.62}$$

$$\nabla_\rho R_{\sigma\nu} - \nabla_\nu R_{\sigma\rho} + \nabla_\lambda R^\lambda{}_{\sigma\nu\rho} = 0 \mid g^{\sigma\rho} \tag{2.63}$$

$$\nabla^\rho R_{\rho\nu} - \nabla_\nu R + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} = 0 \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned}\nabla^\rho R_{\rho\nu} - \nabla^\mu(g_{\mu\nu}R) + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} &= \\ = 2\nabla^\mu R_{\mu\nu} - \nabla^\mu(g_{\mu\nu}R) &= \\ = 2\nabla^\mu\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R\right) &= 0 \;\blacksquare\end{aligned} \tag{2.65}$$

Линеаризованные уравнения Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T\right) \tag{2.66}$$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{2.67}$$

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda}(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) \;=\; 0 \tag{2.68}$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}(g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}) \;=\; 0 \;\Rightarrow \tag{2.69}$$

Всё R и всё Γ – это возмущения над нулевыми значениями за счет возмущения $h_{\mu\nu}$
$\Rightarrow$ можно использовать формулы первого порядка для возмущений:

$$R^\mu{}_{\nu\lambda\rho} = \partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\rho} - \partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda} \;(\delta \text{ не пишем}) \tag{2.70}$$

$$\begin{aligned}\partial_\lambda\Gamma^\mu_{\nu\rho} &= \frac{1}{2}\partial_\lambda[\eta^{\mu\sigma}(\partial_\lambda h_{\rho\sigma} + \partial_\rho h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\nu\rho})] = \\ &= \frac{1}{2}(\partial^\sigma\partial_\nu h_{\rho\sigma} + \partial^\sigma\partial_\rho h_{\sigma\nu} - \partial^\sigma\partial_\sigma h_{\nu\rho})\end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\begin{aligned}\partial_\rho\Gamma^\mu_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2}\partial_\rho[\eta^{\lambda\sigma}(\partial_\nu h_{\lambda\sigma} + \partial_\lambda h_{\sigma\nu} - \partial_\sigma h_{\nu\lambda})] = \\ &= \frac{1}{2}(\partial_\rho\partial_\nu h^\lambda_\lambda + \partial_\rho\partial^\sigma h_{\sigma\nu} - \partial_\rho\partial^\lambda h_{\nu\lambda})\end{aligned} \tag{2.72}$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial^\lambda\partial_\mu h_{\nu\lambda} + \partial^\lambda\partial_\nu h_{\lambda\mu} - \partial^\lambda\partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\nu\partial_\mu h^\lambda_\lambda) \tag{2.73}$$

$R_{\mu\nu}$ калибровочно инвариантно относительно преобразования:

$$h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu \;(\text{проверить}) \tag{2.74}$$

Гармоническая калибровка:

$$\partial_\mu h^\mu_\nu - \frac{1}{2}\partial^\nu h^\lambda_\lambda = 0 \qquad (2.75)$$

обеспечена, если

$$\partial_\mu \partial^\mu \xi_\nu = -\left(\partial_\mu h^\mu_\nu - \frac{1}{2} h^\lambda_\lambda\right) \qquad (2.76)$$

Тогда, из (2.73):

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box h_{\mu\nu} \ \Rightarrow \qquad (2.77)$$

$$\boxed{\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} T\right)} \qquad (2.78)$$

Если $T_{\mu\nu} = 0$, то
$\Box h_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow$ волновое уравнение, грав. волны в вакууме.

<u>Замечание</u>: если $G = 0$, то грав. волны все равно есть.

Макроскопический феноменологический тензор энергии-импульса изотропного «вещества»

1. Покоящееся вещество («идеальная жидкость») в пространстве Минковского:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & & & 0 \\ & p & & \\ & & p & \\ 0 & & & p \end{pmatrix} \qquad (2.79)$$

$$u^\mu = (1, 0, 0, 0) \qquad (2.80)$$

2. Вещество движется в пространстве Минковского:

$$(p+\rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} - \underline{\text{это тензор}} \qquad (2.81)$$

В системе покоя материи:

$$(p+\rho)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} - p\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \rho & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} \qquad (2.82)$$

В произвольной движущейся системе:

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \qquad (2.83)$$

3. Вещество в произвольной системе.
В локально-Лоренцевой системе должно быть:

$$T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - p\eta^{\mu\nu} \qquad (2.84)$$

Тогда общековариантный тензор ЭИ:

$$\boxed{T^{\mu\nu} = (p+\rho)u^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}} \qquad (2.85)$$

Статическое изотропное вещество как источник гравитации

$$\Box h_{\mu\nu} = -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} T \right) \tag{2.86}$$

Для компоненты 00: $\backslash T = \rho - 3p \backslash$

$$\partial_0^2 h_{00} - \Delta h_{00} = -8\pi G(\rho + 3p) \ \Rightarrow \tag{2.87}$$

$$\Delta h_{00} = 8\pi G(\rho + 3p) \tag{2.88}$$

В нерелятивистсткой статике (см. (2.45)):

$$\Delta h_{00} = 2\Delta\varphi \ \Rightarrow \tag{2.89}$$

$$\Delta\varphi = 4\pi G(\rho + 3p) \tag{2.90}$$

Источником гравитации является не ρ, а $\rho + 3p$.
Если $\rho < 0$, $p = 0$ $\Rightarrow$ антигравитация.
Если $\rho + 3p < 0$ $\Rightarrow$ тоже антигравитация!

<u>Λ-член</u>

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G(\Lambda g_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}) \tag{2.91}$$

$$T_{\mu\nu}^{(\Lambda)} = \Lambda \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \tag{2.92}$$

Если $\Lambda > 0$, то $\rho + 3p = -2\Lambda < 0$.
Космологическая констаната $\Lambda > 0$ приводит к антигравитации.